一种解决有向图下资源分配问题的分布式自适应惩罚算法

韦红松

重庆交通大学信息科学与工程学院　重庆　400074

摘　要：针对有向图上具有非光滑目标函数和一般集合约束的资源分配问题，设计了一种新的分布式连续时间自适应惩罚算法。该算法通过引入距离惩罚函数方法来处理局部集合约束。与现有相关结果相比，所提出的算法不依赖于目标函数的可微性，同时不依赖于特定的初始条件，即使在非平衡有向图上也能驱动智能体的决策变量收敛到最优解。此外，基于适当的假设，给出并严格证明了算法的收敛性质。

关键词：分布式优化；有向图；资源分配；惩罚方法；多智能体系统

引言

近年来，大规模网络化系统的快速发展使得分布式优化受到广泛关注，其目标是在约束条件下最小化多个局部目标函数之和。资源分配问题（Resource Allocation Problem，RAP）作为一类重要的分布式优化问题，广泛应用于电力系统、交通系统等领域。为解决这类问题，文献中提出了众多集中式与分布式算法。后者因无需中心节点，在鲁棒性和隐私保护方面更具优势[1]。

随着信息物理系统及图分析技术的发展，学者提出了大量连续时间分布式算法求解RAP，例如投影算法、预设时间算法、处理不等式约束的算法以及无需初始化的算法。值得注意的是，相对于无约束或仅等式约束的策略，考虑局部可行性约束的结果更符合实际需求。文献采用惩罚函数法处理局部箱体约束，但能同时处理等式和一般集合约束的分布式惩罚函数法结果仍较少[2]。

本研究设计了一种新的分布式自适应连续时间算法。

一、问题描述

本文考虑具有N个智能体的资源分配问题，其具体形式如下：

$$\begin{aligned}&\min f(x)=\sum_{i=1}^{N} f_i(x_i)\\&s.t.\sum_{i=1}^{N} x_i=r\\&x_i\in\Omega_i, i=1,\ldots,N\end{aligned}\qquad(7)$$

作者简介：韦红松（1998.01-），男，贵州省遵义市人，汉族，硕士研究生，多智能体系统控制与分布式优化。

其中，f_i是第i个局部成本函数，同时f_i不一定可微，r是需求总量。$x_i\in R^n$表示智能体i对应的决策变量或资源变量，它需要满足网络资源约束$\sum_{i=1}^{N} x_i=r$，并且满足局部凸集约束$x_i\in\Omega_i$。

为了便于之后的分析，给出以下假设：

假设1：有向通信图$\mathcal{G}$是强连通的。

假设2：存在$x_i\in \operatorname{int}(\Omega_i)$，使得$\sum_{i=1}^{N} x_i=r$成立。

假设3：局部目标函数f_i满足：（1）f_i是凸的并且是利普希兹连续的；（2）f_i是C_i–强凸的并且其次梯度在$\operatorname{int}(\Omega_i)$上是有界的。

注释1：在假设3条件下，存在常数M_i使得，

$$\|g_i\|\le M_i,\forall g_i\in\partial f_i(x_i),\forall x_i\in R^n\qquad(8)$$

这一有界性保证了算法在非光滑点的数值稳定性。

注释2：这些假设在分布式优化领域是标准且广泛采用的。这些假设为算法收敛性分析提供了坚实基础[3]。

通过引入距离惩罚函数，资源分配问题（7）则转化成为如下的等式约束优化问题：

$$\begin{aligned}&\min \tilde{f}(x,y)=\sum_{i=1}^{N} f_i(x_i)+y_i d(x_i,\Omega_i)\\&s.t.\sum_{i=1}^{N} x_i=r\end{aligned}\qquad(9)$$

其中，$y=(y_1,\ldots,y_N)^T$是一个惩罚参数。

注释3：在假设2和3下，问题（7）和（9）均为凸优化问题，且强对偶性质和Slater条件成立，并且问题具有唯一的全局最优解[4]。

下面的引理5-6给出了问题（7）和（9）的最优解

之间的关系。

引理5： 设f_i是M_i–利普希兹连续的，并定义 $\tilde{\Omega}_i \in R^n$ 为闭集且内点非空。令 $\bar{a} \in R^N_{>0}$ 且满足 $\bar{a}_i \geq \sum_{i=1}^{N} M_i, i=1,\ldots,N$，则对于所有满足 $a_i \geq \bar{a}_i$ 的 $a \in R^n$，函数 $f(x)=\sum_{i=1}^{N} f_i(x_i)$ 在集合 $\bar{\Omega}=\prod_{i=1}^{N}\tilde{\Omega}_i$ 上的最小值点集合，与下式的最小值点集合一致：

$$f(x)+\sum_{i=1}^{N} a_i d(x_i,\tilde{\Omega}_i) \tag{10}$$

引理6： 在假设2和3下，存在一个常量 $y \in R^N_{>0}$ 使得

$$\underset{x\in\bar{\Omega},\sum_{i=1}^{N}x_i=r}{\operatorname{argmin}} f(x)=\underset{\sum_{i=1}^{N}x_i=r}{\operatorname{argmin}} \tilde{f}(x,y) \tag{11}$$

其中 $\bar{\Omega}=\prod_{i=1}^{N}\tilde{\Omega}_i$，$y \in \bar{\Omega}$ 满足 $x-y=d(x,\bar{\Omega})$。

根据引理6，问题（7）的最优解可以在选择合适的惩罚参数y的基础上通过求解问题（9）来获得。

根据假设2和3，$\tilde{f}(x,y)$ 是一个凸函数，又由于等式约束是仿射的，强对偶性质成立[5]。设y^*与问题（8）中的y相同，则$x^* \in R^{nN}$是问题（8）的最优解，当且仅当存在$\lambda^* \in R^n$，使得（x^*, y^*, λ^*）满足以下条件

$$g^*+Y^*h^*-\lambda^*=0_{Nn}$$
$$\left(1_N^T \otimes I_n\right)x^*=r \tag{12}$$

其中 $g^* \in \partial f(x^*)$，$Y^*=\operatorname{diag}\{y_1^* I_n,\ldots,y_N^* I_n\}$，$h^* \in \partial D(x^*,\bar{\Omega})$，$D(x^*,\bar{\Omega})=\left(d(x_1^*,\Omega_1),\ldots,d(x_N^*,\Omega_N)\right)^T$。

二、主要结果

本节将提出一种分布式优化算法来解决（9）中的资源分配问题，并对该算法进行收敛性分析。

$$\dot{\lambda}_i=-\left(z_i^i\right)^{-1}(x_i-r_i)-\sum_{j\in\mathcal{N}_i} a_{ij}\left(\lambda_i-\lambda_j\right)-\mu_i \tag{13a}$$

$$\dot{x}_i \in -\partial f_i(x_i)+\lambda_i-y_i\partial d(x_i,\Omega_i) \tag{13b}$$

$$\dot{\mu}_i=\sum_{j\in\mathcal{N}_i} a_{ij}\left(\lambda_i-\lambda_j\right) \tag{13c}$$

$$\dot{z}_i=-\sum_{j\in\mathcal{N}_i} a_{ij}\left(z_i-z_j\right) \tag{13d}$$

$$\dot{y}_i=d(x_i,\Omega_i) \tag{13e}$$

其中，x_i表示智能体i对应的决策变量，y_i是智能体i自适应惩罚增益，$y_i(0)>0, i=1,\ldots,N$，μ_i为辅助变量并且有 $\mu_i(0)=0$。对所有的 $i \in \mathcal{V}$，z_i^i 是z_i的第i个分量且有 $z_i^i(0)=1$；对所有的 $i \neq j$，有 $z_i^j(0)=0$，这保证了 $\left(z_i^i\right)^{-1}$ 的存在。

注释4： 算法（13）中的y_i具有极其重要的性质。因为 $\dot{y}_i=d(x_i,\Omega_i)\geq 0$，所以$y_i$是单调不减的，即 $\forall t \geq 0$，有 $y_i(t)>0$。该算法引入了广义梯度来处理目标函数不可微性，惩罚参数自适应克服了参数选取的困难。由假设1和引理1可知，矩阵对角线元素 $\exp(-L_N)$ 的所有元素非负，并且严格为正，此性质隐含节点 $i \in \mathcal{V}$ 的局部状态分量 z_i^i 均满足正定约束。根据矩阵可逆性定理，$\left(z_i^i\right)^{-1}$ 必然存在。

系统（13）可以进一步改写成下面的紧凑形式：

$$\dot{\lambda}=-\left(Z_N^{-1}\otimes I_n\right)(x-r)-\left(L_N\otimes I_n\right)\lambda-\mu \tag{14a}$$

$$\dot{x} \in -\partial f(x)+\lambda-Y\partial D(x,\bar{\Omega}) \tag{14b}$$

$$\dot{\mu}=\left(L_N\otimes I_n\right)\lambda \tag{14c}$$

$$\dot{z}=-\left(L_N\otimes I_N\right)z \tag{14d}$$

$$\dot{y}=D(x,\bar{\Omega}) \tag{14e}$$

其中，$Y=\operatorname{diag}\{y_1 I_n,\ldots,y_N I_n\}$，$y(0)\in R^N_{>0}$，$D(x,\bar{\Omega})$ $\left(d(x_1,\Omega_1),\ldots,d(x_N,\Omega_N)\right)^T$，$\partial D(x,\bar{\Omega})=\left(\partial d(x_1,\Omega_1),\ldots,d(x_N,\Omega_N)\right)^T$，$Z_N=\operatorname{diag}\{z_1^1,\ldots,z_N^N\}$。

注释5： 便于理解分布式机制及其隐私保证可以做如下分析。对于智能体i：（1）维护本地状态：x_i，λ_i，μ_i，y_i，z_i。（2）维护邻居信息：λ_i，$z_j(i,j\in\mathcal{N}_i)$。敏感信息f_i，Ω_i不参与通信。于是，通过分布式对偶分解，原始问题信息得到保护。

结束语

本文针对非平衡有向图下带非光滑目标函数和一般集合约束的资源分配问题，提出了一种分布式自适应惩罚算法。仿真结果表明，该算法在多种场景下均有效，且优于现有方法。

参考文献

[1]AMJADY N, NASIRI R H. Economic dispatch using an efficient real–coded genetic algorithm[J]. IET Generation, Transmission & Distribution, 2009, 3(3): 266–278.

[2]YUAN H T, BI J, ZHOU M C, et al. Time–aware multi–application task scheduling with guaranteed

delay constraints in green data center[J]. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, 2018, 15(3): 1138–1151.

[3]WANG G Z, BIAN Q Y, XIN H H, et al. A robust reserve scheduling method considering asymmetrical wind power distribution[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2018, 5(5): 961–967.

[4]ZHAO J, LIU S X, ZHOU M C, et al. Modified cuckoo search algorithm to solve economic power dispatch optimization problems[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2018, 5(4): 794–806.

[5]GUO G, Zhang R, ZHOU Z D. A local-minimization free zero-gradient-sum algorithm for distributed optimization[J]. Automatica, 2023, 157: 111247.