线性代数中的数学思想及其应用

张珂珂
晋中信息学院　山西晋中　030800

摘　要：线性代数是电气、机器人、数字、财务、营销等专业学生所必修的一门重要的数学基础课程，其教学实践深度融合了多种数学理念。诸如类比、转化、归纳等思想，在教学活动中扮演着关键角色，这些理念的融入，不仅促进了学生对线性代数知识要点的理解和掌握，培养学生创造性能力以及逻辑推理能力等具有重要作用。

关键词：线性代数；数学思想；数学方法；应用

引言

线性代数作为理工与经济管理学科的基础课程，对于学生的专业学习及研究生入学考试具有举足轻重的地位。该课程的核心目标在于传授给学生线性代数的基本理论及其应用方法，涵盖行列式、矩阵等知识点，这些知识不仅为学习后续课程，如离散数学和运筹学打下坚实的理论基础，而且在提升学生思维能力、激发创造力、增强智能及逻辑推理能力方面发挥着关键作用。线性代数课程内容具有概念抽象、运算规则众多等特点，知识点之间联系紧密且相互影响。因此，对学生提出了以下学习要求：必须深刻理解各个概念，准确把握符号意义，熟练记忆定理的前提、结论及其应用场景，熟悉各类运算规则与计算方法，同时学生应及时对所学内容进行反思和总结，实现知识的内化与灵活运用，达到触类旁通的效果。

在课堂教学中，许多学生学习起来会有些吃力，讲到一些知识点时，学生不理解，只是单纯地记忆计算方法，虽然可以解出题目，但根本不会应用，也不知道可以运用到哪些领域，继续发展下去，会打击学生学习线性代数这门课程的积极性、主动性，不利于学生的发展。教育实践中，线性代数作为数学的一门基础课程，其内在的数学思想是引导学生探索和理解课程精髓的关键，这些思想不仅促进学生从根本上掌握知识，还激发他们联系实际生活，增强知识的应用性，从而促进学生的全面发展。线性代数教学过程中，如何有效渗透数学思想，并使其成为学生知识体系中不可或缺的一部分，在这一过程中，教师需关注理论与实践的紧密结合，以数学思想为桥梁，衔接课堂讲授与生活实际，提高学生对线性代数概念和技能的把握。

作者简介：张珂珂，1993.06，女，汉族，山西省朔州市怀仁市，硕士，助教，研究方向：凸和离散几何。

1.类比思想

类比思想是一种基于事物之间相似性的认知方法，它允许我们根据已知的关于一类事物的性质或规则，推测或应用这些性质或规则到另一类具有相似特征的事物上。这种思想不仅帮助我们更好地理解和掌握数学概念，还使得记忆数学公式变得更加简单和直接。

在学习矩阵的概念时，学生对其较为陌生，但在日常生活中，矩阵无处不在。学生课表、成绩单、企业中的各种报表、车站的时刻表等等，这些都是矩阵，矩阵的本质就是一个数表，这样易于学生了解矩阵的概念，与实际生活就紧密联系了起来。概念之后，讲矩阵的运算，可以类比实数的运算，其中运算规律有符合实数运算规律的，也有不符合的。线性代数作为数学的重要分支，其理论体系中的矩阵运算展现出独特的数学魅力。矩阵的加法操作遵循交换律与结合律，这与实数的运算规则相契合，然而矩阵乘法的定义则源自线性变换的内在联系，其运算定律与实数乘法存在显著差异。在实数中，有$ab=ba$，而在矩阵中，矩阵乘法一般不满足交换律，即$AB \neq BA$；实数中当$ab=0$时，可得$a=0$或$b=0$；但在矩阵乘法中，$AB=O$不一定能推出$A=O$或$B=O$.再有实数中$ab=ac$，$a \neq 0$，可推出$b=c$；而在矩阵中$AB=AC$，$A \neq O$时不一定能推出$B=C$.再比如类比实数1，矩阵有单位阵E.关于逆矩阵的引出也运用了类比思想。在实数中有$\frac{1}{a} \cdot a = a \cdot \frac{1}{a} = 1$，其中$a \neq 0$. $\frac{1}{a}$即a^{-1}.引进逆矩阵，对于n阶方阵A，如果存在一个n阶方阵B，使$AB=BA=E$，则称矩阵A可逆，矩阵B为矩阵A的逆矩阵[2]40-56.

2.化归思想

所谓的化归思想[4]，实则是将问题进行本质上的转

换，通过一系列的变换手法，将原始问题映射至一个更为简单易懂的数学模型，这一过程不仅包含了从高层次到低层次的降维，也意味着从陌生领域向熟悉领域的迁移，从而达到解决的一种重要思想，这种转化过程对学生来说，既是一个探索的过程，又是一个创新的过程。

在判断向量组的线性关系时，就可用矩阵这个工具来求解，把每个向量作为矩阵的列向量构成矩阵，从而进行研究。探讨线性方程组的解法过程中，矩阵扮演着不可或缺的角色。针对齐次线性方程组，即形式为AX=0的问题，我们主要分析其系数矩阵A。实施初等行变换，可将A转换为行阶梯形矩阵，进而根据矩阵A的秩来判定方程组的解的性质。而对于非齐次线性方程组，形式为AX=b，我们则需要考虑增广矩阵，由系数矩阵A和向量b组合而成。类似地，通过初等行变换处理，获得其行阶梯形矩阵以便进行进一步分析，确定$r(A),r(\overline{A})$，判断线性方程组解的存在性，给出通解[2]114–122。

问题1：已知四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$,求 $A_{21}-2A_{22}+3A_{23}-A_{24}$.

解析：拿到这样一道题目，有的学生没有想法，直接上来就去求A_{21}，A_{22}，A_{23}，A_{24}这四个代数余子式，对于一个四阶行列式来说，$A_{21},A_{22},A_{23},A_{24}$均为三阶行列式，但此方法一是计算量大，二是学生在计算代数余子式时可能会忽略正负号，错误率会增加。

事实上，元素a_{ij}的代数余子式A_{ij}只与元素a_{ij}的位置有关，而与元素a_{ij}本身的大小无关。已知行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\d_1&d_2&d_3&d_4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$$

显然，它与原行列式D中第二行元素具有相同的代数余子式，其中$d_1=1,\ d_2=-2,\ d_3=3,\ d_4=-1.$

$$故\ A_{21}-2A_{22}+3A_{23}-A_{24}=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\1&-2&3&-1\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}.$$

于是该题我们就将求四个三阶行列式的代数式的和转化为去计算一个四阶行列式，简化了计算。

3.归纳与演绎思想

归纳思想[8]是对事物规律总结和认识的过程，探讨数学理念时，线性代数作为一个重要的分支，其核心在于借助实例对数学对象进行系统的观察与总结，提炼出一般性的规律。以n阶行列式为例，其概念的理解和计算法则的掌握，是建立在二元及三元线性方程组基础上的。从基本的二阶行列式入手，延伸至三阶行列式的定义和运算规则，这一过程不仅为n阶行列式的引入奠定了坚实的基础，而且为后续更复杂行列式的推导提供了方法，在此基础上我们推广至n阶行列式的定义及运算方法，每个步骤都紧密联系。

演绎思想是从一般到特殊，是进行科学推理的基础，广泛应用于科学、技术等领域，有助于学生增强思维和综合分析能力，从而更好地解决实际问题。线性代数的主线是矩阵，实际上是按照一般到特殊矩阵这样一个思路去研究，一般矩阵–方阵–三角矩阵–数量矩阵–对角矩阵。像方阵特有的行列式以及求逆矩阵；求解四阶行列式时，会用到上（下）三角法，其实就是把一个四阶矩阵化成三角矩阵；研究向量组时，向量就是一个特殊的矩阵。

4.函数思想

函数思想[9]利用函数的基本概念及其特性，作为探讨、转换及解决问题的策略。观察线性代数中行列式的运算和证明过程，不难发现其中深刻地体现了函数思想的应用。

问题2：求方程 $\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4+x\\a_1&a_2&a_3+x&a_4\\a_1&a_2+x&a_3&a_4\\a_1+x&a_2&a_3&a_4\end{vmatrix}=0$ 的根.

解析：上述行列式本质上就是一个关于x的函数，可以考虑用升阶法[2]18–20计算该行列式。

$$D=\begin{vmatrix}1&a_1&a_2&a_3&a_4\\0&a_1&a_2&a_3&a_4+x\\0&a_1&a_2&a_3+x&a_4\\0&a_1&a_2+x&a_3&a_4\\0&a_1+x&a_2&a_3&a_4\end{vmatrix}$$

$$\overset{r_i-r_1}{\underset{i=2,3,4,5}{=}}\begin{vmatrix}1&a_1&a_2&a_3&a_4\\-1&0&0&0&x\\-1&0&0&x&0\\-1&0&x&0&0\\-1&x&0&0&0\end{vmatrix}.$$

当$x=0$时，根据行列式的性质可得$D=0.$

当$x\neq0$时，

$$D=\begin{vmatrix} 1+\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{x} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\left(1+\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{x}\right)x^4.$$

从而方程 $D=0$ 的解为 $x=0$ 和 $x=-a_1-a_2-a_3-a_4$.

问题3：已知多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 3 & 4 \\ x^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ x^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix}$，证明：$f'(x)=0$ 有且仅有两个实根.

解：易知 $f(x)$ 为四阶范德蒙德行列式[2]18，可得

$$f(x)=(2-x)\cdot(3-x)\cdot(4-x)\cdot(3-2)\cdot(4-2)\cdot(4-3)$$
$$=-2x^3+18x^2-52x+24.$$

所以 $f(x)$ 为3次多项式.分别令 $x=2,3,4$, 知 $f(2)=f(3)=f(4)=0$, 则 $f(x)$ 在 $[2,3],[3,4]$ 上满足罗尔定理[10]的条件，所以存在 $x_1\in(2,3)$, $x_2\in(3,4)$, 使 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$, 即 x_1,x_2 为 $f'(x)=0$ 的两个实根.因 $f(x)$ 为3次多项式，则 $f'(x)$ 为2次多项式，所以 $f'(x)=0$ 有且仅有两个实根.

5.降阶思想

在求解四阶行列式时，根据行列式展开定理[2]11：行列式可以按任意行（列）展开，值不变，从而实现将一个高阶行列式化为低阶行列式。降阶法三步走：

（1）选：选0或1比较多的一行（列）；

（2）化：化更多的0出来，使得该行（列）只剩下1个非零元；

（3）按该行（列）展开。

问题4：求解行列式 $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

解：找到0或1较多的一行（列），可以是第三行或者第四列，这里我们选取第四列.

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_1-2r_4 \\ r_2-r_4}}{=} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=A_{44}=(-1)^{4+4}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_2+2c_3}{=}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix}=A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=-7.$$

结束语

线性代数作为数学领域的一门核心课程，其内部蕴含的数学理念与逻辑思维方法是连接各个数学知识点的关键链条，占据了举足轻重的位置，对这些理念的掌握，不仅仅是一段时间的需求，而是伴随终身的宝贵财富。教师需转换传统教学观念，注重发掘并凸显线性代数中的核心思想方法，将这些内在的思维方式融入教学实践中，使之成为学生易于感知的内容。传授知识的过程中，教师应当将教材中潜藏的数学思想方法明确地展现给学生，帮助他们深刻理解数学问题的实质，不仅促使学生学会如何学习数学，更能培养他们运用数学知识解决实际问题的能力，提高数学素养。

参考文献

[1]郭大鹏.简论《线性代数》的几个教学策略[J].中国成人教育，2004，(03)：96-97.

[2]张天德，王玮等.线性代数（慕课版）[M].北京：人民邮电出版社，2020，7.

[3]陈元红.在线性代数教学中培养学生数学思维[J].产业与科技论坛，2023，22(15)：204-205.

[4]王磊，刘寅，晏燕雄.认识线性代数中的化归思想，培养学生的化归意识[J].西南师范大学学报（自然科学版），2021，46(12)：144-148.

[5]刘素兵，郝琳，曹大志.数学思想方法在线性代数教学中的思考[J].教育现代化，2018，5(46)：11-13.

[6]杜翠真，尹潇潇.线性代数教学中数学思想方法的培养[J].河西学院学报，2015，31(05)：111-114.

[7]李曦.数学思想方法融入线性代数教学中的探索[J].南昌航空大学学报（自然科学版），2014，28(03)：105-108.

[8]王颖，南基洙.线性代数教学中的归纳与演绎方法[J].高等数学研究，2013，16(06)：46-48+51.

[9]陈建华，李立斌.浅析用函数思想解线性代数问题[J].大学数学，2008，24(05)：144-148.

[10]华东师范大学数学科学学院编-5版.数学分析.上册[M].北京：高等教育出版社，2019.5：111-112.