

基于SOLO分类理论的高考数学试题思维层次分析

——以2023年四套全国卷为例

肖荐予

广西师范大学数学与统计学院 广西桂林 541004

摘要: 本文以知识内容与认知层次为依据、以SOLO分类理论作为基础制定思维层次划分标准,并且将其应用于2023年四套全国数学卷的试题分析中。结果表明:该四套高考卷集中聚焦于多点、关联结构和函数、几何与代数两大板块,SOLO思维层次的分布趋势为多点结构>关联结构>单点结构>抽象拓展结构,但美中不足的是存在部分知识板块的思维层次考察不全。基于此,对于一线教师建议:稳固根底,打造基石;弃繁就简,通融并蓄;关注因材施教,成就高阶思维。对于命题建议:增加高阶思维题目的比例;平衡不同知识点的覆盖;加强过程与方法的考察。

关键词: SOLO分类理论; 高考数学试题; 思维层次; 试题评析

一、问题提出

高考在中国教育体系中扮演着至关重要的角色,它不仅是基础教育与高等教育之间的桥梁,并且是教育评价体系改革的关键点。伴随着2023年6月高考的正式落幕,高考数学试卷再一度引起社会性的广泛关注。2023年高考整体上符合国家教育方针,依据课程内容、课程标准而成,在高考改革中留下了浓重的一笔。

在新课程以及新高考改革的背景下,将会有越来越多的省份加入全国卷,所以从学生角度考虑,高考试题需要具有更强的适应性与选拔性,从教师角度考虑,则需要洞悉试卷命题规律、变化以及如何备考。本研究则借助SOLO分类理论关注试题对于学生思维能力所处的层次和阶段的要求,以2023年高考四套全国卷数学试卷为例进行分析。

二、研究设计

1. 研究对象

本研究选取2023年高考全国卷中四套试卷为例,分别为全国甲、乙(理科数学),新课标I、II卷(以下简称甲、乙卷,I、II卷)。在选取对象上,这四套试卷所适用地域不同,所以需要注意一点的是在甲卷、乙卷中存有与I、II卷考察内容不同的选修部分,例如不等

式选讲与参数方程等,由于该部分试题并不存在于另外两套之中,考虑到这一因素可能会影响数据,导致结论偏差,所以不纳入考察范围。

2. 分析工具

本研究主要使用SOLO分类理论。该理论是20世纪80年代初,由澳大利亚教育心理学家Biggs与Collis,以皮亚杰的思维发展阶段论为基础而提出的学习质量评价。如图1^[1]它将学生对于某个问题的学习程度从能力、思维操作、一致性与收敛、应答结构4个方面划分为5个水平,由低至高依次为:前结构层次、单点结构层次、多点结构层次、关联结构层、抽象拓展结构层次^[2]。

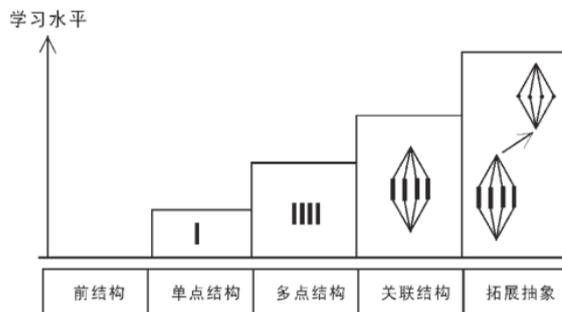


图1 SOLO分类理论图

三、研究过程

1. 试题的SOLO层次划分

根据SOLO分类理论,学生的思维层次可以分为上文5个层次,但其中前结构层次难以检测到学生掌握程

作者简介: 肖荐予(2001年6月),男,吉林省吉林市,广西师范大学,在读研究生,学科教学(数学)专业,广西桂林市,邮编:541006。

度,难以体现试题的层次,故本研究不包含该层次。同时,本文参考曾建国以知识点考察的角度划分SOLO层次的方法^[3]编制得高考试题层次划分,如下表1。

表1 SOLO理论下高考数学试题划分表

SOLO层次划分	试题所需能力及要求	解题所涉及的知识点	图示	编码
单点结构	正确求解试题所需知识是单一的试题线索单一且明确,解题情景较为简单.	1个		U
多点结构	正确求解试题所需知识点为多个,但知识点之间相互独立,只需简单罗列,不需有机整合.	≥2个		M
关联结构	正确求解试题须考生全面把握试题,结合问题情境,在多个解题线索中将多个知识点有机联系起来.	≥3个		R
抽象拓展结构	正确求解试题需要在丰富的线索中、陌生的情境中,结合明显的知识点,通过联想、类比、推理得出隐藏线索.	≥3个		E

2. 试题内容领域划分

本文依据《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》(以下简称《标准》)中课程内容的分类板块将试题所考察的知识内容分为预备知识、函数、几何与代数、概率与统计、数学建模活动与数学探究活动^[4],但数学建模活动与数学探究在《标准》中的要求是蕴含于各个板块的学习之中,考察时也蕴含于其他知识点之中,故本文分类将不包含该板块,具体如下表2

3. 试卷编码

本文将根据上文所划分的标准对2023年四套试卷进行试题所属划分。其一是确定每道题所属知识板块,例如某道题所考知识点为指数函数部分,则属于“函数”板块,编码即为2,其次判断试题所属的SOLO层次,若为单点结构则编码为U;若为多点结构则编码为M,以此类推。另外本文采用考察程度最高的SOLO层次、考察内容中最为主要或关键的知识板块进行编码,尽量避免编码误差。

表2 知识板块所属编码表

试题内容板块划分	包含知识点	编码
预备知识	集合、常用逻辑用语、相等关系与不等关系、从函数观点看一元二次方程和一元二次不等式.	1
函数	函数概念与性质、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、程序框图、线性规划、函数应用、数列、一元函数导数及其应用.	2
几何与代数	平面向量及其应用、复数、立体几何初步、空间向量与立体几何、平面解析几何.	3
概率与统计	概率、统计、计数原理.	4

该四套试卷包含试题有共计112道,分别为单选题32道、多选题16道、填空题16道、解答题24道(其中所有小问共计48道)。由于编码工作的复杂抽象性,本文将选取数道较为典型的题目进行编码以举例说明。

例1 (I卷第13题)某学校开设了4门体育类选修课和4门艺术类选修课,学生需从这8门课中选修2门或3门课,并且每类选修课至少选修1门,则不同的选课方案共有____种(用数学作答)。

试题分析:首先在知识板块上,该题考察计数原理部分知识,因此属于“概率与统计”板块,同时该题是一道SOLO层次中单点结构的代表性题目,线索明确,情境简单,考生仅需掌握且正确运用计数原理部分知识即可正确求解.因此属于“概率与统计”板块下的单点结构试题,编码应为4-U。

例2 (乙卷第5题)设O为平面坐标系的坐标原点,区域 $\{(x,y)|1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ 内随机取一点,记该点为A,则直线OA的倾斜角不大于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为()

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

试题分析:首先在知识板块上,该题以几何部分知识为背景,考察几何概型运算,因此属于概率与统计知识板块,同时,该题显然是一道SOLO层次中多点结构的代表性题目,情境较为熟悉,二者之间并没有交互,考生只需将二者罗列起来.因此,该题编码为4-M。

例3 (II卷第6题)已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x$ 在区间(1, 2)上单调递增,则a的最小值为()

- A. e^2 B. e C. e^{-1} D. e^{-2}

试题分析:首先在知识板块上该题考察导数部分

知识点,属于函数知识板块,考生需要根据 $f'(x) = ae^x - \frac{1}{x} \geq 0$ 在 $(1, 2)$ 上恒成立,再根据分参求最值即可求出,因此本题在SOLO层次上,需要考生将多个知识点之间建立相互联系才可求得正解,故本题编码为2-R。

例4 (I卷第22题(2))在直角坐标系 xOy 中,点 p 到 x 轴的距离等于点 p 到点 $(0, \frac{1}{2})$ 的距离,记动点 p 的轨迹为 W 。

(1)求 W 的方程;(2)已知矩阵 $ABCD$ 有三个顶点在 W 上,证明:矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$ 。

试题分析:首先本题(2)考察内容为圆锥曲线部分知识,属于“几何与代数”板块,其次在思维层次上,本题关键在于通过放缩得 $\frac{1}{2}C=|AB|+|BC| \geq (n+\frac{1}{n})\sqrt{1+n^2}$,并且为简便运算还需对右平方后设新函数求导,最后排除边界值。故该题需要在丰富的线索中、陌生的情境中,结合明显的知识点,通过联想、类比、推理得出隐藏线索。因此本题编码为2-E。

四、分析结果

1. “SOLO思维层次与考查内容”二维分析

为了直观了解2023年高考理科数学全国试题思维层次的分布情况,本文将根据绘制的4套试题“试题思维层次+考查内容”划分二维分布表,举例I卷分布表如下表4。

表4 | 卷“试题思维层次+考查内容”划分二维分布表
新课标I卷

层次 \ 板块	预备知识	函数	几何与代数	概率与统计
单点结构		5	2、3	13、21(1)
多点结构	1	4、8、10、17(1)、19(1)、20(1)	6、14、18(1)、22(1)	
关联结构	2	7、15、17(2)、19(2)、20(2)	16、18(2)	9、21(2)
抽象拓展结构		11	12、22(2)	21(3)

(1)从考察知识板块考虑:①2023年中四套全国卷对于考察重点均以函数和几何与代数两大板块为重点。②试题以概率与统计、预备知识这两个板块为主要考察内容的试题占较小部分,所以对于后续命题来说,这一方向可能是需要改进的。

(2)从各个知识板块所考察的SOLO层次考虑:在函数和几何与代数两大板块中,这两个板块对于SOLO层次的考察基本是全面的,多点结构与关联结构是考察集中的思维层次,但抽象拓展结构则少一些。

2. 思维层次水平值分析

本研究同时采用学者艾萍琰与周莹教授所提出的研究框架^[5],即令每套试卷中的单点结构为1水平,多点结构为2水平,关联结构为3水平,抽象扩展结构为4水平,四个板块分别记为Section1至Section4,令 S 为每套思维层次水平总值,其次令 A 、 B 、 C 、 D 分别与四个层次相对应,代表的意义为:同一个板块中,所对应的思维层次所占的分值与该板块所占的总分值的比,则由公式 $T=A \times 1+B \times 2+C \times 3+D \times 4$,同理,也可以算出每套试卷的总体 T 值(如图2)。

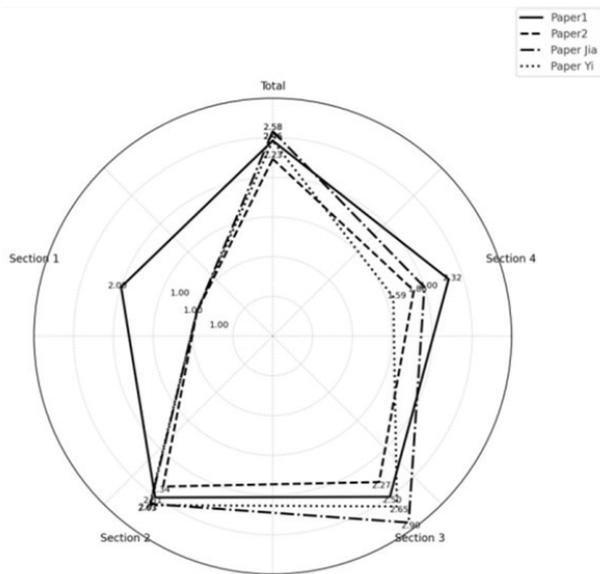


图2 思维层次水平值图

通过观察与分析可以发现四套卷中重点考察的两大板块水平值均值均高于2.5,总体水平值均值也高于2.5,即可认为思维层次介于多点结构与关联结构之间。

3. 各SOLO层次、内容板块分值统计分析

为了深入探究2023年四套全国试卷中SOLO层次的情况和命题特性,针对试题的SOLO层次进行了相应的分值统计构建了二维条形图。在这四张图中,横坐标表示四个板块,即预备知识、函数、几何与代数、概率与统计(分别对应1、2、3、4),其次在每一个板块下考察的思维层次分成四个层次,即单点、多点、关联、抽象拓展结构(分别对应其简写U、M、R、E),纵坐标显示了各个板块下各个层次所考察的分值(如图3-6)。

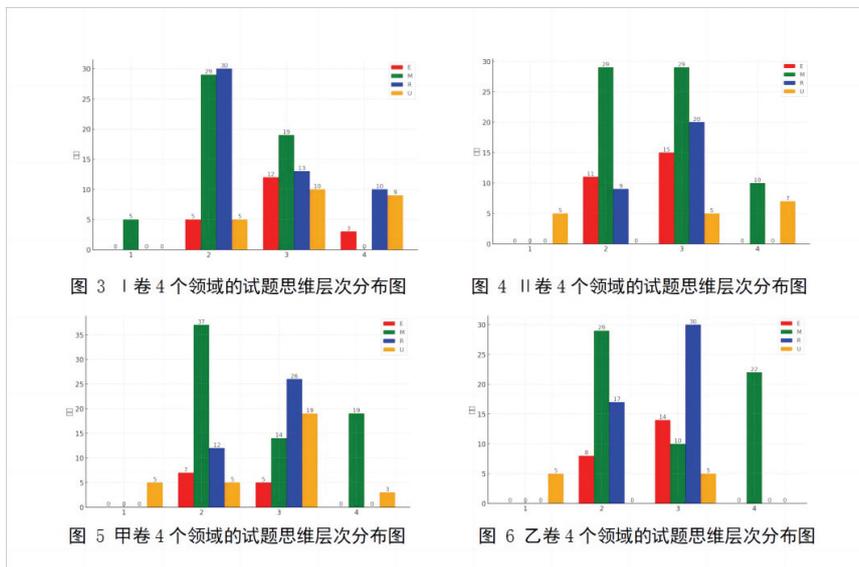


图 3 I 卷 4 个领域的试题思维层次分布图

图 4 II 卷 4 个领域的试题思维层次分布图

图 5 甲卷 4 个领域的试题思维层次分布图

图 6 乙卷 4 个领域的试题思维层次分布图

(1) SOLO 思维层次角度

首先全国卷四套试卷对于各个思维层次的考察均有涉及到，但是不难看出四套试卷对于多点结构、关联结构思维层次的试题偏爱有加，而更高层次的抽象拓展结构则需要学生能够挖掘出问题中的隐含条件，并且将明显的条件有机地联系在一起推得新的条件，最终完成解答，但这样具有强筛选性的题目是少数的，平均只有 13% 左右。

(2) 知识板块角度

试卷对于函数、几何与代数两大板块的重视程度相同，函数、几何与代数板块平均占到了 40%。

预备知识和概率与统计板块的分值占比比较少，但这并不代表这份试卷对于集合部分知识考察量不足，因为本研究是根据每题最主要考察的知识点所提取的数据，所以有可能出现这一现象。

五、结论与启示

1. 结论

(1) SOLO 思维层次与考查内容

首先在知识板块上，本次高考的四套试卷对于知识点的考察是符合课程标准所规定的四大板块，对于各个板块的轻重分明。其次在思维层次上，四套试卷对于函数、几何与代数这两大板块的思维层次考察是相当全面的，这也间接地反映出这两部分对于高中数学的重要性，而将目光聚焦到这两大板块的内部又会发现其对于思维层次的考察分布是有迹可循，四套试卷均符合在考察数量上多点、关联结构 > 抽象拓展结构 > 单点结构，如此设计笔者认为可以最大限度地发挥高考的作用。

其次，从思维水平值的分析可知，首先四套试卷整体处于多点结构与关联结构的中间水平，且较为接近，这也就反映了四套试卷的总体思维水平考察程度基本相近。

随后，每个板块的思维水平均值有如下大小关系：几何与代数 (2.58) \approx 函数 (2.52) > 概率与统计 (1.93) > 预备知识 (1.25)，结合上一点分析可得，函数、几何与代数两大版块不仅题量密集，而且考察思维层次也是较高的。

(2) SOLO 层次、内容板块的分值

从试卷思维层次分值占比分析角度考虑，将四套试卷占比取均值后得到各思维层次的整体分值分布趋势为多点结构 > 关联结构 > 单点结构 > 抽象拓展结构。从试卷板块分值占比分析角度考虑，四套试卷各板块整体分值分布为几何与代数 > 函数 > 概率与统计 > 预备知识。

2. 启示

在当前全面推进高考综合改革的情况下，基于对 2023 年四套全国高考卷的深入分析和探讨，本研究根据命题向高考命题以及高中数学教师教学提供如下建议和策略。

(1) 命题建议

① 增加高阶思维题目的比例

由于高阶思维题目在现有的高考数学试题中占比较低，命题时可以适当增加这类题目的比例，以更好地检测学生的综合应用能力和创新思维能力。这有助于促进学生在解决实际问题时的思考深度和广度。

② 平衡不同知识点的覆盖

命题应确保覆盖高中数学课程的各个知识点，避免某些知识点过分重视或被忽视，这样可以确保考试全面评估学生的数学知识和能力。

③加强过程与方法的考察

除了结果正确与否外，过程和方法的考察也非常重要。可以通过设计一些开放性题目，让学生展示解题过程，评价解题的方法和思维过程，从而更全面地评估学生的数学素养。

(2) 教学建议

①稳固根底，打造基石

通过本研究可以发现2023年四套高考卷对于相对较低阶思维的考察占比仍然是相当大的，单点结构与多点结构之和几乎在四套卷重占到了55%以上，而我们通常认为多点结构是将多个单点结构串联起来即可，这一现象的出现便给予了教师一定的教学方向，便是夯实基础，并且在一定程度上关注多个知识点之间的联系，以及学生的信息提取能力。

②弃繁就简，通融并蓄

如果基础题是掌握知识点或简单联系即可，那么中档题便是需要灵活变通。

高考数学强调考查学生数学核心素养，并以此作为选拔人才的核心，试题设计注重情境化，反对套路和机械式刷题。这样的设计旨在提高学生在校的学习效率，避免无效和机械式的学习方法^[6]。同时，新高考试题的设计变化，如解答题题序的变化，打破过去的模式，落实反押题措施。这些变化不仅让优秀的考生脱颖而出，同时使得过去常用的刷题训练方法失效。

所以应对解题训练进行深入反思，要求教师在日常教学中要“讲到点上”，即将这道题最本质、最关键的信息阐述出来，这也就要求教师在日常的教学之外要对所讲内容精雕细琢，方可百炼成钢。

③关注因材施教，成就高阶思维

抽象拓展结构这部分便是具有极强筛选性的试题，而如何因材施教地培养、指导“尖子生”完成这样的试题便是每一位教师都值得思考的问题。

在此笔者给出如下建议^[7]：①夯实基础。古语有云：“不积跬步无以至千里”，打牢基础一定是培养“尖子生”的第一步。②教学的留白。正如孔子所言“不愤不启，不悱不发”，同样的，数学教学中部分知识应留给学生自己探索，不仅锻炼了探索思维而且培养了兴趣。③因材施教。对于这类学生应该有单独的、更高层次的培养方案，以及不同教学的教学资源，并通过设置逐渐递增的目标达到培养高阶思维的目的。

参考文献

- [1] Biggs J. & Watkins, D. Classroom Learning. Singapore: Prentice Hall, 1995. 176.
- [2] John B. Biggs & Kevin F. Collis. 学习质量评价 [M]. 高凌飏, 张岩红, 译. 北京: 人民教育出版社, 2010: 27-32.
- [3] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准 (2017年版2020年修订) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 2-34.
- [4] 艾琿琿, 周莹. 基于SOLO分类理论的高考数学试题思维层次分析——以2016年全国卷(理科)为例 [J]. 教育测量与评价, 2017, (05): 58-64.
- [5] 蔡海涛, 柯跃海. 加强教考衔接 助力育人改革——2023年新高考数学全国卷试题评析 [J]. 数学通报, 2023, 62(09): 39-42.
- [6] 郭玉峰, 吴惠玲. 聚焦核心素养 体现育人价值——2023年高考数学全国卷试题评析 [J]. 人民教育, 2023(23): 30-36.
- [7] 鲁依玲, 夏玉梅, 宁连华. 基于SOLO分类理论的高考数学试题分析——以2022年全国数学新高考I卷为例 [J]. 数学教育学报, 2023, 32(03): 18-23.