

因式分解法在初中数学教学中的应用

周雨婷

扬州大学 江苏昆山 215300

摘要: 在代数表达式中, 将式子重写为因数乘积的过程, 即因式分解, 扮演了极其核心的角色。它在中学阶段数学教育里应用广泛, 成为解决众多数学难题的强大辅助手段。因式分解技巧具有较高的灵活性和技术性, 能有效促进学生思考能力的提升, 并辅助他们更有效地攻克题目, 同时加强了学生对反向思维的理解和应用。

关键词: 数学课堂教学; 因式分解法; 解题

1. 因式分解法的概念及对数学教学的意义

1.1 因式分解的概念

将一则多项式拆分为多个单项式相乘的过程称为因式分析, 亦被称作将此多项式进行因式化。此过程主要涉及公因数提取法, 应用恒等式法及十字积法等解法, 恒等式法中尤以利用平方差法及完全平方法进行因式化为常用。

1.2 因式分解法在数学教学中的意义及作用

因式分解这一章节内容一直都是初中数学教学中的重点与难点, 它在整个初中数学代数领域中有着非常重要的地位。在初等数学教育中, 因式分解属于常用的等式变换技巧, 并且其应用十分普遍, 能够作为解开诸多数学难题的利器。这种方法的应用十分灵巧且技巧性强, 对于处理线性方程以及多次幂方程是不可或缺的手段, 通过它我们可以有效降低方程的次数^[1], 同时有利于激发学生的数学思维与觉悟, 强化其问题分析和解决的本领。对于刚入学的初中生来说, 数学的严谨性与专业性要求较高, 掌握这些知识可视为一个巨大的挑战。然而, 一旦学生能够对数学的思维方式有所领悟, 理解了基本的数学概念, 他们就能迅速提升自己的数学水平。众所周知, 因式分解在初中数学领域扮演着极其关键的角色, 它主要的用途体现在几个方面: 一方面, 因式分解构成了数学运算的根基; 另一方面, 如果能够熟练掌握把握因式分解的理论, 并将其巧妙运用于解题思路中, 就可以使得部分数学问题的解决变得更为便捷和准确无误。此外, 在中学数学学习的过程当中, 方程求解尤为关键。例如, 在处理二次方程时, 利用因式分解的交点相乘法要比直接使用公式法来得简便。同时, 在解决高次方程问题时, 最优的策略也是采取因式分解方法。

2. 目前因式分解法在教育教学过程中所面临的问题

在中学数学教育中, 因式分解是一项必须掌握且容易出错的学科要点。课本通常会介绍提公因式和使用配方法两种策略。部分老师为了帮助学生清晰掌握这两个策略的基本概念, 会选择将他们整合在单次课程中共同讲解, 并指导学生做针对性的操练。可是, 课堂教学时间终究有限, 许多同学缺乏千锤百炼的机会, 更别提钻研其中的深层次内容。复习时, 不难发现学生完成的综合习题并没有取得理想的效果, 原因在于他们往往只停留在知识的表层, 面对更加错综复杂的题目时束手无策。作者认为造成这种情况的主因是: 首先, 学习时间有限, 学生对两种策略的领会不够深刻, 在同一课堂上讲解, 容易令学生迷惑, 无法灵活运用所学的方法来解题; 其次, 老师过分注重内容的灌输, 采取因式分解的手法进行常规讲解, 却忽略了给予学生充足的操练机会, 未能有效培育学生应对不同问题的灵活思维能力; 第三点, 教学过程中老师忽略学生对各种解题策略的理解层面, 而是单向传达自己的思路, 导致学生对于概念性公式的掌握不够牢固, 遇到较为困难或类似题型时无法独立着手解决。同时, 因式分解法本身也具有一些难点: 第一个难点是理解因式分解的概念, 因式分解是将一个多项式表达式分解为其因式的乘积的过程, 然而, 理解这个概念可能对一些学生来说不容易, 他们可能会困惑, 不知道如何找到正确的因式或将其乘以正确的次数。第二个难点是选择正确的因式, 在因式分解中, 选择正确的因式是至关重要的。学生可能会面临如何确定一个多项式的因式的挑战。另外, 当多项式中存在较复杂的项时, 难点会进一步增加。第三个难点则是分解复杂多项式, 当多项式较复杂时, 进行因式分解可能变得更加困难。学生可能会面临如何处理多项式中的多个项、多次

幂和高次数的挑战。

3. 因式分解法在初中数学教学中的应用

3.1 因式分解法在课堂教学中的应用

在初中数学课堂中，多项式的因式分解这一章节内容主要包括五节内容。开篇即综述先前掌握的多项式相乘法则，督促学员尝试将若干多项式表达为积的形态，以此作为导入，解释什么叫做公共因子，并阐述因式分解的概念。此外，学生将认识到多项式因式分解即是将一多项式拆解成数个整式相乘的过程。继而展示一些切实的实例，以辅助学员鉴别哪些算式属于因式分解，目的是为了加强并巩固他们对因式分解知识的理解。接着介绍因式分解的一种方法是提公因式法，其关键是找出各项的公因式，然后给出几个具体的例子让学生提公因式，这里的公因式既包括数，又包括字母，并且还要注意符号，若是一个公因式第一项的符号为负号，那么把负号提出来作为公因式中的一部分，同时分解一定要彻底。接着概括精确识别多项式中每一项共有因子的准则为：首先确定系数，其次确认字母，再者确认指数。第二节先回顾之前所学的平方差公式，让学生思考将式子反过来会得到什么，从而引出平方差公式法分解因式，让学生弄清平方差公式法的形式和特点并学会运用，进一步体会互逆思想，然后出一些具体的例子让学生练习用平方差公式法分解因式，并体会连续运用平方差公式法分解因式。在课堂的第三环节，首先布置一系列环境，提供若干组整数的平方和相应的平方数例子，引导学生发现其共性，激发他们的思考与交流，让学生领悟平方运算法则的本质和结构，以此为契机，介绍应用平方运算法则来拆解因式的方法。继而展示标准案例，通过黑板演示来深化学生对这一新概念的把握，并设置针对性习题以供操练，以期在此过程中融入整体概念的教育和逆流思维的训练。另外，在随后的两节课上，将专门讲述如何通过十字交叉乘法拆分一元二次多项式，其中系数为1以及不为1的情形将被分别处理。

3.2 因式分解法在解题教学中的应用

$$\begin{aligned} \text{例题 1: } & (x-y)^2 - 4(x-y-1) \\ &= (x-y)^2 - 4(x-y) + 4 \\ &= (x-y-2)^2 \end{aligned}$$

上述例题中，首先运用到了整体的思想，将其中的 $(x-y)$ 看作一个整体，其次再思考运用何种因式分解的方法去解决，在发现多项式中没有公因式可以提取，也无法运用公式法去进行因式分解的情况下，可以先把多项式进行化简，当然这里还要注意将 $(x-y)$ 作为一个整

体，然后再选取适当的方法进行因式分解。

$$\begin{aligned} \text{例题 2: } & (x+1)(x+2)(x+3)(x+6) + x^2 \\ &= (x^2+7x+6)(x^2+5x+6) + x^2 \end{aligned}$$

法一：令 $t=x^2+6$ ，则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (t+7x)(t+5x) + x^2 \\ &= t^2 + 12xt + 36x^2 \\ &= (t+6x)^2 \\ &= (x^2+6x+6)^2 \end{aligned}$$

法二：令 $m=x^2+6x+6$ ，则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (m+x)(m-x) + x^2 \\ &= m^2 - x^2 + x^2 \\ &= m^2 \\ &= (x^2+6x+6)^2 \end{aligned}$$

上述例题中，方法一和方法二都利用了数学中的换元思想来进行因式分解，首先第一步都是先将 $(x+1)$ 和 $(x+6)$ ， $(x+2)$ 和 $(x+3)$ 相乘，再利用换元思想解决问题，法一将 x^2+6 看作一个整体，用字母 t 去代替，然后利用完全平方公式法分解因式，最后再把原来的 x 回代进去，得到答案；而法二则是将 x^2+6x+6 看作一个整体，用 m 表示，然后利用平方差公式法分解因式，正好将含 x 的项消掉，最后得到 m^2 ，再把 m 用含 x 的式子回代进去，得出同样的结果。因此，再解题过程中，要灵活运用数学思想和方法去分析思考，要活用因式分解法。

4. 因式分解法在实际教学中应注意的问题及建议

就因式分解法在实际教学中应注意的问题而言，首先，在运用提公因式法分解因式时，关键是要找出多项式中各项的公因式，这里的公因式既包括数，又包括字母，要注意看系数有没有可以提取的公因数，并且还要注意符号，若是一个多项式第一项的符号为负号，那么这个时候要把负号提出来作为公因式中的一部分，并且注意括号内各项的符号也要改变，这样做有利于分解。^[2]同时分解一定要彻底。确定多项式中各个项目的共同因子的核心步骤包括：首先明确系数，其次确认字母，最后确保指数一致。

其次，不能盲目地运用因式分解法去解决数学问题，而是要看题目所给的式子是否符合运用因式分解法去分解多项式的特征，比如适用于完全平方分解因式多项式必须是一个三项式，还要有两个平方的项，有这两平方项底数的2倍或-2倍。

最后，当要解决一些综合性的数学问题时，要根据具体问题灵活恰当地运用正确的方法进行因式分解，例如要思考是否能运用整体思想解决一些数学问题，或者

一些题目当中可能会同时涉及多种因式分解的方法,需要连续多次运用同一种或是不同的因式分解的方法将式子进行一定的变形等,此时就需要具体问题具体分析。同时分解的时候一定要彻底,一定要分解到不能再分解为止。假如既无法找出共同因子,又无法应用已知定律时,我们应当首先对多项式进行简化处理,随后开展分解因式的步骤。

众所周知,传统的数学课充斥着单调乏味,往往不足以唤起学生们深厚的数学热情,同时也不太有利于他们的全面发展,长此以往,学生很可能对数学产生厌恶。但在教育改革的新浪潮下,教育者们打破了过往的教育模式,改进了枯燥的数学教学手段,促使学生们由消极的学习态度变为积极的探索姿态。实际操作结果显示,兴趣在学习过程中占据至关重要的地位,一旦学生沉醉于课程内容,他们就会自发地去探索、深入理解相关知识,这种现象对提升教学质量和效果有着显而易见的正面作用。考虑到这一点,教师应在课堂教学中投入更多的精力,根据学生们的数学能力,精心设计一系列富有挑战性的数学问题,以此抓住学生的兴趣,引领他们进一步分析数学概念,激发他们提出问题的冲动。在这样的引领下,学生们学会了如何进行思考、探索问题的深层次原因,并交流他们解决问题的思路和方法,从而唤起了对数学的热爱。例如,在讲解平方差的公式时,老师会在黑板上随机提出一些可以通过心算解决的数学问题,迫使学生们迅速给出答案。学生们在教师的迫切引导下,激情四射地踊跃参与,但也会困惑不解,思考这些庞大的数字怎样能够迅速心算出答案,究竟老师这样做的深意何在?这让学生们面露迷惑。在老师的带领之下,学生一旦掌握了因式分解的技巧,特别是平方差法则,便能轻松解决这一类型的数学难题,从而对这个公式产生了浓烈的热情。紧接着,老师展示了一系列相关的数学公式,并鼓舞他们利用已经学到的多项式乘法知识去解决问题,学生们很快便找到解题的办法。在教师的激励与指导下,学生们自主地将所学的数学知识应用到实际中,自行归纳并验证了平方差法则。此外,为了提高课堂的互动性和学习效率,老师将学生们分成若干小队进行题目的编制与解答比赛,看看哪一队解题最为迅速,这样富有竞争性的氛围显著促进了教学效率的提升。这种教学方法不仅激活了学生们的创新思维,也极大地增强了他们学习数学的主动性和兴趣。

总结与反思

总体来说,因式分解的一般步骤可以归纳为以下六个字:一提,二用,三验。首先,对于各项含有共同因数的多项式,需优先抽取该公共因数。其次,若多项式的各项不具备公因式,则考虑其特性,应用差平方法则或者完全平方法则进行处理。最后,确保每个因子被彻底分解至无法继续分解的程度。同时我认为在运用因式分解法进行解题时,要懂得根据具体情况具体分析,灵活综合地去运用因式分解的几种方法去解决数学问题。在提公因式时要注意看系数有没有可以提取的公因数,同时还要注意当一个公因式第一项的符号为负号,要把负号提出来作为公因式中的一部分。并且会运用公式法,即平方差公式法和完全平方公式法来分解因式。若既不存在可提取的共因子,又无法应用定理进行计算,不妨先将多项式约简至最简形式,接着尝试进行因式的拆分。在数学解题过程中要学会综合灵活运用这几种因式分解的方法去解决一些数学问题,体会整体思想和转化思想,加强互逆思维。而在教学过程中,一定要采用引导式,创设合理的情境,激发学生对数学的兴趣,并且教师要有一个示范的作用,要先给出例题,由教师进行板演,然后再让学生自主练习,因式分解教学的初期要注意步骤的完整性,给学生留有充足的练习巩固时间,要注重因式分解教学的循序渐进性。^[3]在整个过程当中,最为重要的是要注意去教给学生解决问题的数学思路与方法,渗透一些重要的数学思想,比如整体思想,换元思想,分类思想等,^[4]培养学生自主分析思考问题的能力,提高学生的逆向思维和解题能力。数学方法和思想是数学知识文化的精髓所在,因此,在数学教学中,要结合实际,注重数学思想和方法的培养,帮助学生形成良好的数学素养和思维品质。

参考文献

- [1] 张汉斌.整体感悟,逐步分化掌握——初中数学“因式分解”教学的整体设计[J].基础教育,2006年第3期.
- [2] 绵阳市《变式研究》课题组.因式分解教与学变式研究[J].天府数学,1997年第9期.
- [3] 章新杰.有效开展数学因式分解教学的策略研究[J].语数外学习(数学教育),2013年第11期.
- [4] 邹益民.因式分解教学中数学思想方法的渗透与运用[J].中学数学教学,2006年第3期.