

基于布鲁纳结构主义教学理论的本科数学教学实践

——以线性代数为例

谢 婷

西北师范大学管理学院 甘肃兰州 730070

摘 要：作为经济管理类本科生必修的一门数学基础课，线性代数课程不仅在后续专业课的学习中发挥着至关重要的作用，而且在人工智能领域中具有广泛的实践价值。以线性代数课程为例，对如何运用布鲁纳结构主义教学论的理论及实践指导经济管理类本科数学教学进行探讨。主要从四个方面对布鲁纳结构主义教学理论进行分析，包括基于认知发展论提倡早期学习并使用螺旋式教材、教学内容强调学科结构并关注培养学习迁移能力、教学方法倡导发现法并注重直觉思维、强调内部动机并重视发展智力，同时对这一系列的教学主张在线性代数的课程教学中的应用进行探索。

关键词：布鲁纳；结构主义教学理论；线性代数；学科基本结构；发现学习；思政育人

美国教育心理学家布鲁纳是当代认知学派的核心代表人物之一，其教育观念和思想影响深远而广泛。布鲁纳说：“教育，说到底实际上是一种旨在促进或帮助学习者成长与发展的努力”，这一观点在他的结构主义教学理论中得到了充分体现。布鲁纳的结构主义教学理论的以认知心理学的研究成果为基础，在美国面临国家安全威胁的背景下应运而生，这一理论将教育学与心理学相结合，并应用于美国的学校课程改革。

布鲁纳“划时代的著作”《教育过程》^[1]被视为学科结构运动的纲领性文件，更被西方教育界誉为“有史以来教育方面最重要最有影响的一本书”。在书中，他详细阐述了结构主义教学理论的核心思想。布鲁纳认为，学习的本质在于构建一种认知框架，这意味着学生要掌握某一学科的基础架构及其研究的基本态度与方法。他特别指出，学生应该专注于学习各门学科的“核心结构”，即基本的概念、原理以及这些概念和原理之间的规则和相互联系。而在教学活动中，教师应当充分引导和鼓励学生参与到知识体系的建立过程中来，而不仅仅是被动地接受信息，帮助他们理解整个知识网络及其中各部分

之间的相互作用。通过这种方式，教育不仅能够传授知识，还能够培养学生的思维能力和解决问题的能力，从而真正实现促进学习者全面成长与发展的目标。

线性代数是数学专业如管理、经济及工程类大学生的一门必修的数学基础课程，它有助于提高学生的计算能力、抽象思维能力和逻辑推理能力。然而，这一课程以其高度的抽象性、分散的学科组织结构、众多复杂的定理以及重大的计算工作量为特点，这无疑给学生带来了学习困难和理解障碍。此外，线性代数在人工智能领域中具有广泛的应用和重要的实践价值，无论是在机器学习、图像处理还是数据挖掘等领域中，线性代数的理论和方法都为解决这些问题提供了重要的工具和手段^[2]。布鲁纳认为，“结构”是教育活动的核心，他提倡通过探索式学习的方法，将学科的基本结构转化为学生头脑中有效的认知模式，并以此作为学习的主要目标。基于此，以线性代数课程为例，对如何运用布鲁纳结构主义教学论的理论及实践指导经济管理类本科数学教学进行探讨，主要从以下四个维度对布鲁纳结构主义教学理论进行分析，并对其在线性代数课程教学中的应用进行实践探索，如图1所示。

一、布鲁纳的认知发展论与线性代数绪论课的定位

布鲁纳的结构主义教学理论以其认知心理学的研究成果为理论基础和指导依据，他指出，儿童的认知发展是由三个在结构上截然不同且具有质的差异的阶段组成的，每个阶段都标志着儿童认知能力的不同发展水平^[3]。

基金项目：本文系由甘肃省社科规划一般项目资助（项目编号：2024YB039）。

作者简介：谢婷（1988—），女，甘肃甘谷人，西北师范大学管理学院讲师、硕士研究生导师，博士，主要从事模糊数学、粗糙集及其应用研究。

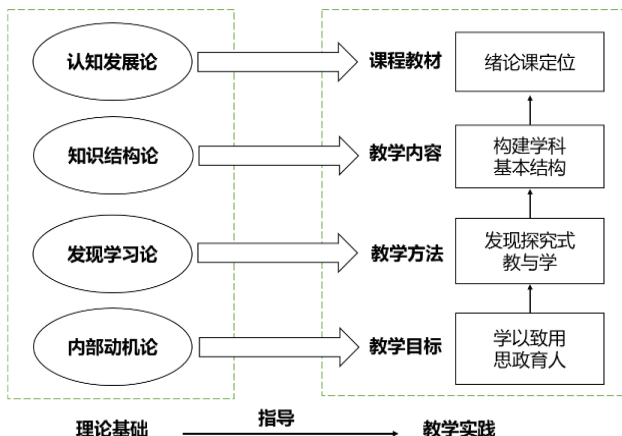


图1 基于结构主义教学理论的教学实践体系

这三个阶段分别是：行为把握阶段，儿童通过直接的身体动作和操作具体的物体来学习和理解世界；图像把握阶段，随着年龄的增长，儿童不再需要直接接触物体，而是可以通过想象中的图像来进行思考；符号把握阶段，儿童已经能够使用抽象的符号（如语言、文字、数学符号等）来进行思考，表达复杂思想和概念，并进行逻辑推理。布鲁纳提出学习不是线性的，而是螺旋式的，在各门学科的学习中，人们的认识一般都要经历这样的发现学习的过程。通过由简单到复杂、螺旋上升的学习过程，学生能够逐步构建起连接初级知识和高级知识的桥梁，这使得复杂的概念和理论不再显得遥不可及，而是建立在坚实的基础之上。

数学作为一门不断进化的学科，其发展永远在向着发现更有力的工具和更简单的方法前行，这个过程中必须有勇气摒弃陈旧的内容和繁复的技巧，体现了数学自身在历史长河中演变的轨迹，也恰当地昭示了其在革新过程中固有的替代特征，这就是典型的“高级”数学替换“低级”数学的思路。其实，我们从小学习数学知识背后贯穿着一个典型的认知发展过程：一些底层的“低级”数学因发现更强大的工具和更简单的方法而归入“高级”数学阵营，但我们不能只学习“高级”数学而不完全忽略“低级”数学的，这是因为儿童要求循序渐进地、因材施教地发展其认知能力，需要接触到与其年龄和认知能力相适应的任务和内容。也就是说，要理解“高级”数学更需要掌握“低级”数学。这与布鲁纳的认知发展论高度契合，他认为认知能力是逐渐发展起来的，不同的发展阶段需要不同的任务来调动。因此，在线性代数绪论课的教学中，有必要讲清楚以下两个方面的内容，充分发挥绪论课在教育教学中承前启后的桥

梁作用，如图2所示。

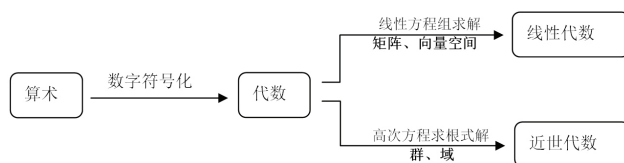


图2 代数的发展简图

（一）算术与代数

人类对数的概念的理解与使用可以追溯到大约三十万年前，但有文字记载的数学却出现得要晚得多，直到公元前3400年左右才出现，而数字的四则运算则更晚，《九章算术》的内容涵盖了我们从小学到中学所学的“算术”课程的全部内容。在“算术”领域，其“真正的进展”得益于“更有力的工具和更简单的方法”的发现，这里的工具与方法就是“数符号化”^[4]。在我国的宋元时代（约13世纪50至60年代），当时的著作里提及“天元术”和“四元术”，会把未知数记为“天元”，后来还把两个、三个以及四个未知数分别记作“天”、“地”、“人”、“物”这四元，它们相当于现在用来表示四个未知数的符号，有了这些“元”，就能求解一些代数方程以及联立代数方程组了。然而在西方，直到16世纪才完全实现了数学符号化。于是，“算术”我们可以将它理解为“计算的技术与方法”，而“代数”则是“以符号替代数字”，即“数符号化”。

（二）中学代数课程与大学代数课程

当下中学阶段所学习的“代数”课程内容，主要包括解一元二次方程和多元一次联立方程等，通常为二元、三元至多四元一次联立方程。从这里出发，可以给出代数的“前世今生”。

解多元一次联立方程推动了线性代数的产生。解多元一次方程组是中学“代数”中的一个重要内容，教材中一般着重讲二元或三元一次联立方程组，所用的方法是消元法。但是如果变元为四个或更多时，传统的消元法虽然在理论上仍然适用，但在实际操作中会变得非常复杂和繁琐。随着变元数量的增加，消元的步骤会呈指数级增长，增加了计算量和出错的可能性，就得建立起多元一次联立方程组的更高级、更有效的通用方法和理论。经过许多数学家多年的努力，向量空间、矩阵的概念和理论产生了，这不仅给出了解多元一次联立代数方程组的一般理论和方法，而且建立起一门新的学科——“线性代数”^[4]，只涉及进行加减法与数乘运算（统称为线性运算），这也是线性代数中“线性”的内涵。

解一元多次方程孕育了近世代数的产生。中学“代数”中的另一个重要内容是解一元二次方程，其求根公式是由波斯数学家 M. al-Khowarizmi 给出的。事实上，大批的数学家致力于探寻更高次代数方程的求根式解，N.H. Abel 和 E. Galois 建立起了“群”与“域”的概念，这一过程经历了从二次方程到四次方程的成功解法，再到五次及更高次方程的不可解性的证明，推动了现代代数理论的形成，其核心部分就是大学数学专业课程中的“近世代数”，也称为“抽象代数”。伴随着这些理论框架的建立，反过来使得人们对以往高次代数方程求根式解的问题有了更清楚、更深刻的认识和理解。

二、知识结构论与线性代数学科基本结构的建构

布鲁纳的结构主义教学理论强调了结构的重要性，这一理论对教育领域产生了深远的影响。这里的结构就是指知识构成的基本框架，反映了事物之间的相互联系或规律性。布鲁纳认为“不论我们选教什么学科，务必使学生理解学科的基本结构。”学科的基本结构，是指学科的基本概念和原理之间的那种具有内在联系并起普遍作用的知识体系^[5]。学习结构就是学习事物是怎样相互联系的。学生理解了该学科的基本结构，他们便会更容易掌握其基本内容，更加轻松地理解和记忆核心材料，获得更深层次的知识，而不仅仅是记忆一些孤立的事实或信息，并且容易将已经掌握的知识灵活运用到新的情境中，提高他们的学习迁移能力，这样不仅能激发他们深入学习的热情与兴趣，也为他们智力和创造力的增长提供了沃土。学习迁移就是你在一个领域或环境中所学到的东西能够帮助你在另一个领域或环境中更好地学习和表现，实质上是一种学习对另一种学习的影响。

由此可见，教学的目的在于使学生理解学科的基本结构。以线性代数为例，在教学过程中强调知识体系整体性极为重要。教授过程中需要突出各个部分内容之间相互关联像是通过线索一般紧密相联，确保从整体上进行逻辑推演而不是孤立地攻克每一个概念点，在将所有章节有机链接、融会贯通后，学生可从宏观角度洞察与领略整个线性代数领域的精髓。具体而言，所有的问题都是从求解线性方程组出发，像一条绳子一样把教材中所有的章节和知识点串连了起来，使学生从整体上把握和理解线性代数学科的基本结构，这样，教师的教和学生的学就避免了只是知识的堆积，才不至成为无源之水、无本之木，从而也更有助于培养学生的迁移能力。

正如著名数学家华罗庚先生有一个非常精辟的观

点，他认为获取书本知识的过程可以分为两个阶段：首先是“从薄到厚”，即通过学习和积累使知识变得丰富和详细；然后是“从厚到薄”，即将这些丰富的知识进行提炼和简化，形成一个系统的知识结构，达到深刻理解和灵活运用的境界。就线性代数知识结构框架的架构来说，如图3所示，出发点和目的在于求解线性方程组，消元法进行的操作包括交换两个方程、对某一个方程进行数乘、对某两个方程进行加减法运算。一方面，线性方程组的所有系数和常数组成的数表即增广矩阵包含了此线性方程组的所有信息，从而引出矩阵的理论，消元法则被对应称为三种类型的初等变换，对于特殊的矩阵即方阵，就又研究行列式理论。这样，也便于学生理解和把握为什么许多线性代数的教材从行列式的理论讲起。另一方面，抛开线性方程组的限定，消元法本身是对某一数组进行线性运算，由此引出向量与向量空间的理论，而矩阵又可以从行（列）向量的角度去构成，进而从向量空间的理论对矩阵加以理解，最终将线性方程组的求解可以从矩阵形式与向量形式联系起来，形成线性代数学科知识理论的闭环。

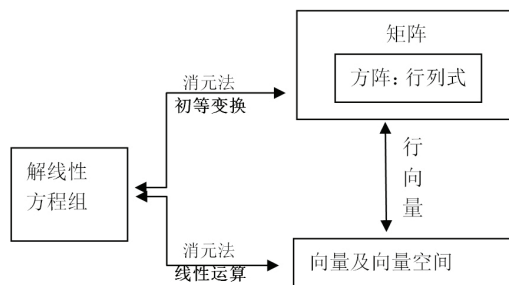


图3 线性代数知识结构图

三、发现学习论与消元法求解线性方程组的两重视角

布鲁纳的结构主义教学理论的一大特色是将掌握结构与发现结构有机地结合和统一起来。布鲁纳提倡实施发现学习法，鼓励学生自己去探究发现各学科知识的基本结构。他指出，“发现”不仅仅是指寻找人类尚未知晓的事物，而是指通过自己的思考亲自获得知识的各种形式。无论是学校里的儿童通过自身努力所做出的发现，还是科学家在尖端研究领域中的发现，其本质都是对现象进行重新组织或转换，使人们能够超越现有的现象进行新的组合，从而获得新的理解和领悟^[6]。不难看出，发现学习中的“发现”实际上指的是“再发现”。在发现学习中，学生的再发现与科学家的再发现之间的差异仅在于程度，而不在于性质，因为它们本质上都是一种

“顿悟”或“领悟”，布鲁纳通常称之为“直觉”^[7]。直觉思维与分析思维相对立，它基于个人的知识领域及问题本身的结构，使思维者能够在无法完全探知过程的情况下，通过跃进和越级的方式得出结论，即使这些结论有时可能是错误的。因此，发现学习法尤其注重问题情境的创设，在教学学生演绎证明之前，先让学生对材料有一个直觉的感知和理解，如果在教学中遇到学生不能立刻说出答案的问题，教师可以引导学生进行猜想，使学生认同猜想的合理性，并对学生进行此类具有针对性的训练。

布鲁纳所强调的发现法侧重于在教师引导下的发现学习。教师通过设置引导性、针对性的“适中问题”，激发学生的独立思考，师生交流互动，帮助学生逐步找到问题的答案。发现学习法鼓励学生积极主动地去探索解决问题，从而能够更深刻地理解和掌握知识。所谓“适中”是指问题的难度恰到好处，既能让学生能够回答出来，又能促进他们的进步。如果问题太容易或太难，都难以有效地提升学生的能力。发现学习的过程实际上是一种探索过程，在这一过程中教师要注重对教学情境的设计与安排，构建富有启迪性的教学环境，使学生掌握学习的探索方法，培育学生灵活运用信息与有效组织信息的能力，养成主动寻求知识的态度与坚持不懈探索真理的精神。在线性代数的教学中引导学生慢慢体会，代数本质上是研究加、减、乘、除运算及其性质，这些运算性质体现在我们中学学过的多项式和方程，而多项式和方程就是典型的代数对象。方程在代数的发展过程中起了极其重要的作用，并且可以解决很多实际问题。

（一）矩阵视角与向量空间视角的对立与统一

一般地，考虑由 m 个 n 元方程联立的方程组，从解线性方程组出发，引导学生发现理解消元法的双重视角，即矩阵的视角和向量与向量空间的视角：用消元法求解线性方程组的过程，本质上就是在对系数和常数组成的所有数据信息表进行加减法和数乘操作，这个数据表就是矩阵，而这些操作就是对相应的增广矩阵进行三种初等行（列）变换；消元法具体而言是对数组进行加减法与数乘运算，这个数组就称为向量，对线性运算是封闭的，引入向量空间的基本概念。从这一点来看，矩阵理论与向量空间理论就像求解线性方程组的两条腿，各自发挥自己的作用。

这两重视角又可以统一起来，统一到线性代数学科所有问题的出发点，即求解线性方程组。一方面，齐次

线性方程组的全部解向量的集合构成一个向量空间，称为解空间；非齐次线性方程组的全部解可以表示为一个特解与其导出组（即其对应的齐次线性方程组）通解之和。另一方面，线性方程组解的情况，完全由其系数矩阵、增广矩阵与未知元的个数之间的关系确定。事实上，线性方程组如果具有较好的形式，就容易判断是否有解、有多少解，而具有较好形式的方程组，其增广矩阵是阶梯型矩阵，可经由初等行变换得到，而初等变换不改变矩阵的秩，因此阶梯形矩阵非零行的个数就是所求线性方程组增广矩阵的秩。秩，可以理解为线性方程组中带来新信息的方程个数，即此系统中所包含的信息个数。

解线性方程组矩阵视角与向量空间视角的对立与统一，认识始终贯穿于教师的教学过程中，目的是从让学生对线性代数这门课程有个整体把握，可以自己去探究学习，就像在他们心中种下一棵树，只要有根，就会顺着太阳的方向不断长出新的枝叶，不断延伸壮大。

（二）创设适中问题情境，引导学生发现学习

在具体的教学中，通过具体的例子引导学生发现总结一些容易混淆的知识点，教师针对性地引导学生发现问题做进一步的探索学习，增强学生自己对基本概念和理论的知识建构。

例如，在矩阵理论的教学，很多学生会困惑矩阵与行列式的关系，需要教师引导学生进行发现归纳。从形式上看，行列式是一个代数式或是一个数，经过计算可求得其值，而矩阵是一个数表，它的行数和列数可以不同。而本质上，行列式是矩阵的一个从属的数，也就是说我们给矩阵赋予了一个值，需要注意的是行列式只针对方阵，矩阵的这个值有多种解释。从背景来源解释，求解方程个数和未知元个数相同的方程组时，通过引入行列式这个记号，便于归纳证明求解此类型线性方程组的克莱姆法则；而行列式的绝对值几何解释就是体积，就一阶行列式对应一维线段的长度，二阶行列式对应二维平面中平行四边形面积，三阶行列式对应三维空间中平行六面体的体积。再如，引导学生探索发现向量组的极大无关组与秩、向量空间的基与维数之间的联系和区别。

引入矩阵理论与向量空间理论后，线性方程组的就有其矩阵形式与向量形式。具体来说，非齐次线性方程组就转化为其系数矩阵列向量组的线性组合（线性表示）的表达式，则其有解的充要条件是常数项组成的列向量可以由系数矩阵的列向量组线性表示；齐次线性方

程组可以描述为由其系数矩阵的列向量组的相关性,则其有非零解的充要条件是列向量组线性相关。

四、内部动机论与思政育人

在布鲁纳的结构主义教学理论中,学习动力是推动学生积极参与学习过程的关键因素,与学习内容(即基本结构)和学习方法(即发现学习)紧密相关。布鲁纳认为,有效的学习不仅依赖于教学内容和方法,还需要内在的学习动力来驱动学生积极参与和探索,而且他进一步阐述了认知兴趣是促进学生学习的最直接、最活跃且最稳定的动机,这种兴趣源自学生对知识的好奇心和求知欲,直接指向认识活动本身,即学生为了获得新知识而学习,而不是为了外部奖励(如分数、奖品)或避免惩罚。当学生通过自己的努力获得新知识时,这种成就感和满足感本身就是一种强大的内在奖励,是由学习本身提供的,更为持久和稳定,因此,这种由内在所催生的动机形式被称为内部动机。

积极的学习动机和开放的态度有助于促进学习迁移,并且能够源源不断地维持学生对新知识的热切追求。面向管理类学生的线性代数的教学,要结合学生的专业特点,从实际的问题出发,例如线性回归、神经网络中的分类问题等,抽象出数学模型,用线性代数的理论知识加以解决,让学生切实觉得线性代数确实是可以有效解决管理类专业问题的,获得成功的满足感和胜任感,提高学生的自信心,不断培养和强化学生学习线性代数的内部动机。

在课堂教学中,教师要善于挖掘思政元素,进一步升华学习的内部动机,潜移默化地达到思政育人的目的。例如,线性代数的学习不要忘记始终是围绕着线性方程组的求解问题而展开的,引导学生理解“不忘初心,方得始终”,提醒学生要坚守自己最初的信仰和愿望,不要被外界的诱惑和困难所干扰。再比如,中学“低级”数学的学习是否有必要?正如余华所说“人生没有白走的路,每一步都算数”,我们的每一个经历和付出都有其价值,即使面对的是挫折与困境,这些经历最终都会在某个时刻发挥作用,赋予我们更强的适应力与智慧,帮助

个人成长和进步。

结语

相较于中学数学,大学数学更强调不同对象之间的联系,在这种联系的过程中揭示其性质。就像法国数学家庞加莱所说:“我们从来没有完全理解过一个问题,我们只是对这个问题理解的更深了一点、更多了一点。”依据结构主义教学理论,围绕基础知识结构,搭建起各章节内容间的联系,运用类比、归纳等方式对课程内容加以总结,进而构建出完备的知识结构框架导图。在指导学生的过程中,借助学生个人的知识结构导图,精准洞悉每位学生对课程知识的理解程度和掌握情况,以便有针对性地为學生提供辅导。课堂教学活动的推行中,倾向教师融入案例教学手段,促使理论教学与实际应用、课堂讲授和讨论环节紧密融合,确立学生在教学活动中的主体地位,鼓励他们踊跃参与教学活动,激发其内在学习动力,全方位施展自主学习能力,开拓创新思维,扭转学生被动跟从学习的局面,赋予其主导自身学习进程的力量。

参考文献

- [1]杰罗姆·布鲁纳.教育过程[M].上海:上海人民出版社,1973.
- [2]吉尔伯特·斯特朗.线性代数与数据学习[M].北京:清华大学出版社,2024.
- [3]李倩.布鲁纳结构主义教学理论对数学教育的启示[J].数学之友,2022(17):2-5.
- [4]龚昇.数学历史的启示[J].数学教学通讯,2001(07):1-6.
- [5]陈华丽,代钦.布鲁纳数学教育思想探析[J].内蒙古师范大学学报(教育科学版).2013,26(10):73-75.
- [6]和学新.学科中心课程思潮的现代化——结构主义课程思潮述评[J].太原教育学院学报,2001(03):9-16.
- [7]余文森.布鲁纳结构主义教学理论评析[J].外国教育研究,1992(03):13-16.