浅谈不同空间下数值半径的相关性质

刘　晶

包头师范学院　数学科学学院　内蒙古包头　014030

摘　要：文章主要探讨了在Hilbert空间、C *- 代数以及Hilbert C *- 模上数值半径的相关性质，并且通过刻画不同空间中数值半径不等式，分析空间结构对数值半径的影响。首先介绍了不同空间下数值域和数值半径的研究意义，然后详细阐述了Hilbert空间，C *- 代数和Hilbert C *- 模的定义与联系，在此基础上探讨了不同空间下数值半径的相关性质。其次Hilbert C *- 模作为Hilbert空间与C *- 代数理论结合的产物，考虑其数值半径理论既继承了经典空间的性质，又展现了代数结构诱导的新特征，为进一步探索不同空间下的数值半径的相关性质提供了理论基础。

关键词：数值半径；Hilbert空间；C *- 代数；Hilbert C *- 模

引言

近年来，数值域及其数值半径相关性质的研究已成为泛函分析领域的重要课题。国内外众多学者开始研究数值域以及数值半径的相关内容。我们可以知道Hilbert空间中有界线性算子的数值域是二次型和Rayleigh商从有限维到无限维的逻辑推广，它在数学理论和实际应用中都具有重要地位。从学术研究角度来讲，线性算子数值域的研究涉及纯理论和应用科学的诸多分支，诸如算子理论、泛函分析、C *- 代数、Banach代数、数值分析、扰动理论、控制论以及量子物理等。此外关于线性算子数值域的研究方法也十分丰富，代数、分析、几何、组合理论、计算机编程都是非常有用的研究工具。因此线性算子数值域以及相关问题的研究受到了诸多学者的广泛关注。数值域应用领域及较活跃的研究方向主要有泛函分析及数值域的谱包含性质、线性算子数值域的次可加性、线性算子数值域与系统稳定性分析、线性算子数值域与最优化理论、线性算子数值域与量子控制。因此Hilbert空间中线性算子数值域的研究不仅具有深厚的理论研究价值，还具有广泛的实际应用价值。众所周知，数值半径是刻画有界线性算子数值域的分布范围，是描述为圆心在原点且包含数值域闭包的最小圆的半径。不仅如此，数值半径在双曲型初值问题的有限差分近似解的稳定理论方面也具有非常重要的应用。

基金项目：包头师范学院科研项目 BSYKJ2022-ZQ05

作者简介：刘晶（1993-08），女，汉族，内蒙古，硕士，讲师，研究方向：数学物理方程。

众所周知，模理论是代数学的重要组成部分。Hilbert C *- 模概念的提出最早是由著名的算子代数学家Kaplansky I. 于20世纪50年代引入的，他给出了交换C *- 代数的Hilbert C *- 模概念，并以此为工具证明了I型AW *- 代数上的导子均为内导子。一般非交换C *- 代数上的Hilbert C *- 模概念直到20世纪70年代才分别由Paschke W. L.和Rieffel M. A.引入，用于刻画C *- 代数的表示理论及约化理论。此后随着Hilbert C *- 模作为重要工具在A. Connes的非交换几何及S. L. Woronowicz的量子群理论中的应用，极大地促进了Hilbert C *- 模理论的发展。Hilbert C *- 模也是Jones广义指标理论、算子值自由概率论的主要工具。近年来，又广泛用于量子概率的研究之中。由此可以看出，Hilbert C *- 模空间理论是在应用过程中间不断发展起来的。顾名思义，Hilbert C *- 模是Hilbert空间和C *- 代数结合的产物。通俗来说Hilbert空间和C *- 代数均为特殊的Hilbert C *- 模，也就是Hilbert C *- 模空间是Hilbert 空间和C *- 代数的推广。因此，Hilbert C *- 模基本理论是Hilbert空间理论与C *- 代数理论交相辉映的结果。此后Hilbert C *- 模理论蓬勃发展起来，成为非交换几何、KK-理论、量子群论、广义指标理论的主要工具。目前Hilbert C *- 模上数值域及数值半径的研究已经受到了广泛的关注。

一、研究内容

（一）基础知识

定义：给定C *- 代数A和右A-模E，若E上赋有A-值内积：(,)：E×E→A即对于任意给定的元素x，y，z属

于E.及任意的a属于A和λ属于复数域K，下述各条成立：

（1）（x，x）≥0；且若（x，x）=0，则x=0；

（2）（x，λy）=λ（x，y），（x，y+z）=（x，z）+（y，z）；

（3）（x，ay）=a（x，y）；

（4）（x，y）=（y，x）*.

则称E是C *- 代数A上的准Hilbert C *- 模.

给定准Hilbert C *- 模，对任意x属于E，令 $\|x\|=\sqrt{\|(x,x)\|}$.若E关于上述范数完备，即E为Banach空间，则称E为代数A上的Hilbert C *- 模或Hilbert C^*-A-模简称为Hilbert C *- 模.

注：（1）任给C *- 代数A定义映射：（,）：A×A→A，（a，b）=a^*b

易证这个映射满足定义条件.因此A自身关于内积（a，b）=a^*b也成为一个Hilbert C *- 模.由此，C *- 代数可以看成Hilbert C *- 模的特殊情况.

（2）若A退化成复数域K，则定义的Hilbert C *- 模E成为Hilbert空间.由此，Hilbert空间可以看成Hilbert C *- 模的特殊情况，从而Hilbert空间理论对于Hilbert C *- 模理论的确立和发展具有启迪作用.

（二）主要结论

首先我们给出Hilbert空间中有界线性算子数值半径的经典不等式：设T是Hilbert空间H中的有界线性算子，则有

$$\frac{1}{4}\|T^*T+TT^*\|\le\omega^2(T)\le\frac{1}{2}\|T^*T+TT^*\|$$

成立.

上述关于Hilbert空间中有界线性算子数值半径的经典不等式的证明主要是利用Hilbert空间中的有界线性算子T的笛卡尔分解和有界线性算子数值半径和范数的定义，以及Hilbert空间上的Cauchy-Schwarz不等式得到的。

其次我们给出C *- 代数中有界线性算子数值半径的不等式：设A一个C *- 代数，令a属于A，e属于A且 $\rho(|e|^2)=1$.则对于任意α不为零且α属于数域K，有不等式

$$v^2(a)\le\frac{\max\{1,|\alpha-1|\}}{2|\alpha|}\|a^*a+aa^*\|+\frac{1}{|\alpha|}v(a^2)$$

成立.

上述关于C *- 代数空间中有界线性算子数值半径的不等式的证明主要是利用主要证明是我们利用C *- 代数A中数值半径和范数的定义，以及C *- 代数A上的含参数的Cauchy-Schwarz不等式和Buzano不等式（也是Cauchy-Schwarz不等式的推广形式）进行放缩得到以上数值半径的不等式的推广形式，当α=n且n→无穷大的时候，有

$$v^2(a)\le\frac{1}{2}\|a^*a+aa^*\|.$$

最后我们给出Hilbert C *- 模E中有界可共轭模映射数值半径的不等式：设T是Hilbert C *- 模E中的有界可共轭的线性模映射，则有不等式

$$\frac{1}{4}\|T^*T+TT^*\|\le\omega^2{}_A(t)\le\frac{1}{2}\|T^*T+TT^*\|$$

成立.

上述关于Hilbert C *- 模E中有界可共轭模映射数值半径的不等式的证明主要是利用Hilbert C *- 模E中的有界可共轭模映射T的笛卡尔分解和有界可共轭模映射数值半径和范数的定义，以及Hilbert C *- 模E上的Cauchy-Schwarz不等式进行放缩得到以上数值半径不等式。

综上所述，根据上面的基础知识和主要结论我们可知在Hilbert空间，C *- 代数空间和Hilbert C *- 模这三个不同空间下可以定义不同的数值域及数值半径，并给出了不同空间下数值半径的不等式。通过证明方法我们可以知道在不同空间下我们利用的不等式也是成立，我们考虑到Hilbert空间，C *- 代数和Hilbert C *- 模这三个不同空间也是有密切的关系的。通过上述的描述，我们可以考虑这样的一个问题，我们能否将Hilbert空间上有界线性算子数值半径的不等式以及数值半径的性质推广到Hilbert C *- 模和C *- 代数呢？

二、研究目标与研究方法

（一）研究目标

1.基础理论整理：系统整理Hilbert空间、C *- 代数及Hilbert C *- 模的相关定义，归纳不同空间下数值域及数值半径的基础理论；辨析三类不同空间之间的内在联系，并研究数值域与数值半径概念及性质在不同空间中的区别与关联。

2.不等式推广并验证：验证Hilbert空间中的经典不等式（如Cauchy不等式、Buzano不等式、Young不等式等）在C *- 代数空间和Hilbert C *- 模中的适用性；探索通过不同方法将Hilbert空间的数值半径不等式推广至C *- 代数与Hilbert C *- 模并证明其可行性。

3.定理拓展研究：将Hilbert空间中刻画数值半径不等式上下界的定理推广至C *- 代数和Hilbert C *- 模，并通过举例的方式验证推广后数值半径不等式上下界的有效性。

（二）研究方法

1.文献归纳与理论梳理：通过收集相关文献资料，系统整理Hilbert空间数值域及数值半径的基础理论，研读数值域与数值半径的专著及论文；梳理三类不同空间下的数值域及数值半径理论，构建“从特殊到一般”的研究范式。

2.概念解析与核心推演：深入剖析不同空间的概念及数值域、数值半径的定义，以核心理论为基础，从多维度探究空间关系。Hilbert C*-模作为Hilbert空间与C*-代数的融合产物，其数值半径理论自然涵盖经典Hilbert空间的结论。当Hilbert C*-模退化为Hilbert空间时，其定义与性质完全等价，这体现了数学理论拓展的逻辑严密性与方法统一性。例如，笛卡尔分解、Buzano不等式等核心工具在不同空间中均通过“内积–范数”关联机制发挥作用，印证了数值半径理论在空间拓展中的思想一致性。

3.实例应用与定理验证：结合相关文献中的具体实例，运用多种证明方法与思路，以核心理论为支撑，通过实例应用验证定理的适用性。

三、研究特色与创新点

本文的特色与创新之处在于对Hilbert空间上数值域及数值半径的研究，以及Hilbert C*-模、Hilbert空间和C*-代数的特殊关系。我们给出了在不同空间下数值域及数值半径的概念，并刻画了数值半径不等式的上下界。经典Hilbert空间上数值域及数值半径理论虽已成熟，但在处理非交换代数结构时存在局限性。从空间层次看，Hilbert C*-模与Hilbert空间的关系如同代数与数域的关系，当C*-代数退化为复数域时，其Hilbert C*-模自然退化为Hilbert空间。这种层次性为数值半径理论的拓展提供了逻辑路径。一方面，Hilbert空间中的数值半径性质可视为Hilbert C*-模理论的特例。另一方面，代数结构的引入带来了新的研究问题，如代数取值的数值半径如何定义、代数的对合运算如何影响数值半径的不等式等，这些问题推动了算子理论从“数域上的分析”向“代数上的几何”演进。

结论

数值域及数值半径理论在多个领域都有重要应用。在泛函分析中，数值域的谱包含性质是研究算子谱理论的基础；在系统稳定性分析中，数值半径的次可加性为判断系统稳定性提供了有效工具；在最优化理论中，数值半径与算子范数的关系为优化算法的设计提供了理论支持；在量子控制领域，数值半径的性质被用于量子态的调控和测量。特别值得注意的是，Hilbert C*-模作为Hilbert空间和C*-代数理论的结合体，其数值半径性质既保留了Hilbert空间的几何特性，又融入了代数的代数结构，为非交换几何和量子群论等前沿领域的研究提供了新的视角。数值半径理论的演变体现了数学研究中“特殊到一般”的认知规律：从有限维矩阵的数值域到Hilbert空间的无限维推广再到Hilbert C*-模的代数抽象。每一次理论拓展均伴随着研究工具的革新与应用场景的扩展。这种拓展并非对经典理论的颠覆，而是通过结构分层实现的。Hilbert C*-模理论既保留了Hilbert空间的分析特性，又引入了C*-代数空间的代数几何方法，形成了多维度的研究范式。

本文研究了Hilbert空间、C*-代数和Hilbert C*-模中数值半径的性质及其相互关系。主要贡献包括：明确了Hilbert C*-模作为Hilbert空间与C*-代数理论结合产物的概念内涵，揭示了不同空间结构下数值半径性质的共性与特性。研究表明，数值半径作为刻画算子性质的重要指标，在不同数学结构中展现出丰富的理论内涵和广泛的应用价值。在未来研究可以进一步探讨更一般拓扑结构下的数值半径性质、数值半径在量子计算中的新应用，以及高维和非交换情形下的数值半径不等式。这些研究将有助于深化对算子理论和非交换几何的理解，也推动相关理论在实际问题中的应用。

参考文献

[1] 吴德玉，阿拉坦仓，黄俊杰，海国君，Hilbert空间中线性算子数值域以及应用[M].北京：科学出版社，2018.

[2] 李炳仁，算子代数[M].北京：科学出版社，1998.

[3] 张伦传，Hilbert C*-模理论及其应用[M].北京：科学出版社，2014.

[4] 吴德玉，阿拉坦仓，分块算子矩阵谱理论以及应用[M].北京：科学出版社，2013.

[5] 孙炯，王忠，王万义.线性算子的谱分析[M].第二版.北京：科学出版社，2015.