

继电保护计算中三相静止坐标系到旋转坐标系的变换及其在电力系统中的应用

李 杰 陈 昊 黄廷燕 王 辉
兰州石化机电仪运维中心 甘肃兰州 730060

摘 要: 本文详细推导了三相静止坐标系 (abc 坐标系) 到旋转坐标系 (dq 坐标系) 的变换过程, 结合 Clarke 变换和 Park 变换, 将三相交流量转换为旋转坐标系下的直流量。通过数学推导和验证, 证明了在平衡三相系统中, 该变换能够将时变的交流量解耦为直流量, 从而简化电力系统分析和电机控制设计。文章还讨论了变换矩阵的系数选择 (等幅值变换与等功率变换) 及其物理意义, 为电力系统中的矢量控制提供了理论基础。

关键词: 三相静止坐标系 (abc 坐标系); 旋转坐标系 (dq 坐标系); Clarke 变换; Park 变换; 等幅值变换; 等功率变换

引言

在电力系统和电机控制中, 三相静止坐标系 (abc 坐标系) 和旋转坐标系 (dq 坐标系) 的转换是一个重要的数学工具。通过将三相交流量转换为旋转坐标系下的直流量, 可以简化控制系统的设计, 并实现对电机转矩和磁场的精确控制。本文旨在详细推导 abc 坐标系到 dq 坐标系的变换过程, 并探讨其在电力系统中的应用。

一、坐标变换的基本原理

1. abc 坐标系的定义

abc 坐标系是一个三相静止坐标系, 其三个坐标轴分别对应于三相电压或电流, 相位相差 120° 。在三相平衡系统中, 满足 $U_a + U_b + U_c = 0$ 。

abc 坐标系在电力系统分析和电机控制等领域有着广泛的应用。例如在三相异步电机的分析中, 通过 abc 坐标系可以方便地描述电机三相绕组中的电压和电流关系。这有助于深入理解电机的运行原理, 如转矩的产生机制。

在电力系统故障分析方面, abc 坐标系能够准确地表示三相线路中的电压、电流故障分量。当系统发生单相接地故障时, abc 坐标系下的电压方程可以清晰地反映出故障相和非故障相电压的变化情况。这种表示方法为故障诊断和保护装置的动作原理提供了理论依据。^[1]

此外, abc 坐标系还可以作为坐标变换的基础。从 abc 坐标系到其他坐标系 (如 $dq0$ 坐标系) 的变换在电机矢量控制中是至关重要的环节。通过坐标变换, 可以将三相交流量转换为直流量进行控制, 大大简化了控制算

法, 提高了电机的控制性能。

2. dq 坐标系的定义

dq 坐标系 (Direct-Quadrature 坐标系) 是一种用于描述交流电机的两相旋转坐标系。 dq 坐标系是一个旋转坐标系, 通常以同步速度旋转。 d 轴 (直轴) 和 q 轴 (交轴) 相互垂直, d 轴通常与磁场方向对齐, q 轴与转矩方向对齐。通过将交流量转换到 dq 坐标系, 可以将其解耦为直流量, 这种坐标系的设计使得电机的电磁特性可以更简单地分析和控制, 比如在电机控制中, 可以分别控制 d 轴和 q 轴的电流来实现转矩和磁场的调节。

dq 坐标系在现代电机控制技术中有着广泛的应用。在矢量控制策略里, 利用 dq 坐标系是至关重要的环节。它可以让控制器精确地根据电机的运行状态和需求, 计算出合适的 d 轴和 q 轴电流指令。

在实际应用中, 为了实现 dq 坐标系下的有效控制, 需要精确地获取电机的转子位置信息。这是因为 dq 坐标系是旋转坐标系, 其与定子静止坐标系之间的转换依赖于转子的位置角。通过安装高精度的位置传感器, 如旋转变压器或者光电编码器, 可以准确地得到转子位置信息, 从而确保 dq 坐标系转换的准确性。

另外, 随着电力电子技术的不断发展, dq 坐标系在新型电机的研发和控制方面也发挥着不可替代的作用。例如在永磁同步电机的弱磁控制领域, 借助 dq 坐标系下的数学模型, 可以深入分析电机的磁场和转矩特性, 设计出有效的弱磁控制算法, 从而拓宽电机的调速范围, 提高电机在高速运行时的效率。^[2]

二、坐标变换的数学推导

1. Clarke变换 ($abc \rightarrow \alpha \beta$)

Clarke变换将三相静止坐标系转换为两相静止坐标系 ($\alpha \beta$ 坐标系)。对于平衡的三相系统,其变换矩阵为:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix}$$

该变换使用幅值不变的变换,系数取 $\frac{2}{3}$,确保 $\alpha \beta$ 分量的幅值与原始相电压幅值相同,而如果是功率不变的话,系数为 $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 或者其他系数。

因此在采用Clarke变换时需要先确定变换的条件。比如,当使用等幅值变换时,转换后的 $\alpha \beta$ 分量的幅值与原来的相电压幅值相同。这时候变换矩阵系数取 $\frac{2}{3}$,因为三相合成后的矢量的幅值是原相电压幅值的 $\frac{3}{2}$ 倍,所以为了保持幅值一致,因此需要乘以 $\frac{2}{3}$ 。

那么经过Clarke变换后的 α 和 β 分量应该是:

$$\begin{cases} \alpha = U_m \cos \theta \\ \beta = U_m \sin \theta \end{cases}$$

当三相合成时,空间矢量的位置为 θ ,所以分解到 α 轴和 β 轴的话,就是 $\cos \theta$ 和 $\sin \theta$ 的系数。不过具体的变换矩阵可能需要考虑系数的问题。比如,Clarke变换矩阵为:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{2}{3} * [U_a - 0.5U_b - 0.5U_c] \\ \beta = \frac{2}{3} * \left[\frac{\sqrt{3}}{2}U_b - \frac{\sqrt{3}}{2}U_c \right] \end{cases}$$

当三相平衡时, $U_a + U_b + U_c = 0$,所以可以简化为:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2}{3} * \left(U_a - \frac{1}{2}U_b - \frac{1}{2}U_c \right) \\ \beta &= \frac{2}{3} * \left(0 + \frac{\sqrt{3}}{2}U_b - \frac{\sqrt{3}}{2}U_c \right), \end{aligned}$$

即:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{2}{3} * \left(U_a - \frac{1}{2}U_b - \frac{1}{2}U_c \right) \\ \beta = \frac{\sqrt{3}}{3} * (U_b - U_c) \end{cases}$$

这时候,假设三相的幅值都是 U_m ,相位相差120度,则:

$$\begin{cases} U_a = U_m \cos \theta \\ U_b = U_m \cos(\theta - 120^\circ) \\ U_c = U_m \cos(\theta + 120^\circ) \end{cases}$$

那么将上式中电压表达式代入后可以得到 α 和 β 的表达式。推导过程如下:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2}{3} [U_m \cos \theta - 0.5 * U_m \cos(\theta - 120^\circ) - 0.5 * U_m \cos(\theta + 120^\circ)] \\ &= \frac{2}{3} \{ U_m \cos \theta - 0.5 U_m * (\cos(\theta - 120^\circ) + \cos(\theta + 120^\circ)) \} \\ &= \frac{2}{3} \left(U_m \cos \theta - U_m \cos \left(\frac{\theta - 120^\circ + \theta + 120^\circ}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta - 120^\circ - \theta - 120^\circ}{2} \right) \right) \\ &= \frac{2}{3} (U_m \cos \theta - U_m \cos \theta \cos(-120^\circ)) \\ &= \frac{2}{3} (U_m \cos \theta - U_m \cos \theta \cos 120^\circ) \\ &= \frac{2}{3} (U_m \cos \theta + 0.5 U_m) \\ &= U_m \cos \theta \end{aligned}$$

同样计算 β :

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\sqrt{3}}{3} * (U_b - U_c) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} * (U_m \cos(\theta - 120^\circ) - \cos(\theta + 120^\circ)) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} U_m \left(-2 \sin \frac{\theta - 120^\circ + \theta + 120^\circ}{2} \sin \frac{\theta - 120^\circ - \theta - 120^\circ}{2} \right) \\ &= -\frac{2\sqrt{3}}{3} U_m \sin \theta \sin(-120^\circ) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} U_m \sin \theta \sin 120^\circ \\ &= U_m \sin \theta \end{aligned}$$

通过计算可知:

$$\begin{cases} \alpha = U_m \cos \theta \\ \beta = U_m \sin \theta \end{cases}$$

因此,Clarke变换后的 $\alpha \beta$ 分量确实是 $U_m \cos \theta$ 和 $U_m \sin \theta$,即合成矢量的幅值为 U_m ,和原来的相电压幅值相同,说明这里的Clarke变换使用了等幅值变换,系数为 $\frac{2}{3}$ 。

2. Park变换 ($\alpha \beta \rightarrow dq$)

Park变换,也就是从静止的 $\alpha \beta$ 坐标系转换到旋转的 dq 坐标系。这个转换需要乘以一个旋转矩阵,旋转角度 θ' ,通常是同步旋转的角度,即 $\theta' = \omega t + \delta$,其中 δ 可能是一个初始相位角。假设 dq 坐标系以同步转速 ω 旋

转, 那么它的变换矩阵为:

$$\begin{bmatrix} d \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta' & \sin \theta' \\ -\sin \theta' & \cos \theta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

3. 合并Clarke和Park变换 ($abc \rightarrow dq$)

将Clarke变换和Park变换合并, 直接得到 abc 到 dq 的变换矩阵:

$$\begin{bmatrix} d \\ q \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta' & \cos(\theta - 120^\circ) & \cos(\theta + 120^\circ) \\ -\sin \theta' & -\sin(\theta - 120^\circ) & -\sin(\theta + 120^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix}$$

四、验证与物理意义

1. 平衡系统下的验证

这样, 当 θ' 等于 $\alpha \beta$ 坐标系中矢量的角度 θ 时, 转换后的 d 和 q 分量就是直流量。例如, 如果原来的 $\alpha \beta$ 分量是 $U_m \cos \theta$ 和 $U_m \sin \theta$, 那么旋转角度 $\theta' = \theta$ 的话可得:

$$\begin{cases} d = \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta \\ q = -\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta \end{cases}$$

分别计算出 d 、 q , 计算如下:

$$\begin{aligned} d &= \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta \\ &= U_m \cos \theta \cos \theta + U_m \sin \theta \sin \theta \\ &= U_m (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= U_m \\ q &= -\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta \\ &= \alpha \sin \theta \cos \theta + U_m \sin \theta \cos \theta \\ &= -U_m (\cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

通过计算可知:

$$\begin{cases} d = U_m \\ q = 0 \end{cases}$$

此时, d 轴分量为 U_m , q 轴分量为0, 变成了直流量。这说明当 dq 坐标系的旋转速度与矢量的旋转速度一致

时, 转换后的 dq 分量是直流量, 说明变换的正确性。

2. 物理意义

d 轴分量(直轴): 对应磁场方向的分量, 用于控制磁通。

q 轴分量(交轴): 对应转矩方向的分量, 用于控制转矩。

五、系数选择与应用

1. 等幅值变换与等功率变换

等幅值变换: 系数为 $\frac{2}{3}$, 保证幅值一致。

等功率变换: 系数为 $\sqrt{\frac{2}{3}}$, 确保功率不变。

2. 在电力系统中的应用

电机控制: 通过控制 d 轴和 q 轴电流, 实现磁场和转矩的解耦控制。

电力系统分析: 将三相交流量转换为直流量, 简化系统动态分析。^[3]

结论

本文详细推导了三相静止坐标系到旋转坐标系的变换过程, 结合Clarke变换和Park变换, 将三相交流量转换为旋转坐标系下的直流量。通过数学推导和验证, 证明了该变换在平衡三相系统中的有效性。文章还讨论了变换矩阵的系数选择及其物理意义, 为电力系统和电机控制中的矢量控制提供了理论基础。

参考文献

- [1] 孙振启, 杨文杰. 超高压智能变电站一次主设备在线监测系统的设计与运用研究. 科技资讯, 2024 (22).
- [2] 陈文文, 范伟男, 孙磊. 基于5G网络切片的变电站在线监测研究. 中国新通信, 2022 (19).
- [3] 孙波, 文天增. 在线监测系统在智能变电站继电保护的设计. 通讯世界, 2017 (16).