基于 CNN 高雷诺数下 Burgers 问题稳定求解的探讨

曹文峰　王月超 *
扬州大学数学科学学院　江 苏　扬 州　225002

摘　要：深度学习中卷积神经网络算法（CNN）为求解微分方程数值解提供了新思路，本文将 CNN 与物理方程结合，利用其图像处理和特征提取能力来捕捉流体运动复杂特征，并探讨了高雷诺数下 Burgers 方程的精确求解的可行性。

关键词：卷积神经网络；微分方程；物理信息

引　言：
近年来，求解微分方程的神经网络算法研究逐步完善，物理信息神经网络的出现可以应对许多复杂的微分方程。神经网络从本质上来说就是一个逼近器，可以被认为是一个函数 [1]。本文是基于其他学者的研究下，更加深入的探讨了基于卷积神经网络算法下，高雷诺数下的 Burgers 方程是否同样具有稳定性，这对后续的研究有着不错的铺垫。

一、基于物理信息的神经网络低雷诺数下 Burgers 方程的求解方法

Burgers 方程作为模拟激波传播和反射的非线性偏微分方程，其一般表达式为：

$$u_t + u u_x = v u_{xx}$$

在通常情况下，解决此类问题可以使用有限差分法（FDM）将其离散点处的函数值表示为：

$$u_i(t) = \Delta x^{-1} \int_{x_i-\Delta x/2}^{x_i+\Delta x/2} u(x,t)dx$$

此时用 u_i 表示 t 时刻 x_i 处的函数值，则 x_i 处的空间导数可利用数值求解格式写为

$$\frac{\partial^n u_i}{\partial x^n} \approx \sum_i \alpha_i^{(n)} u_i$$

主要思想是对上述方程中的参数进行优化，产生一组最优参数，这样对于更复杂的偏微分方程组，也可以生成适用于粗分辨率网络的解公式。然而，有限差分法虽然快速且有效性高，但会因此导致过分采样而消耗计算时间。因此，考虑引入全连接层物理信息神经网络算法来解决这个问题。

输入层是函数的输入，输出层是函数的输出。因此，该函数可用于逼近偏微分方程中的任何函数，一旦确定了 θ，我们就可以得到偏微分方程的解。首先，我们初始化方程以及其边界条件：

$$\begin{cases} u_t + L u_x = 0, (t,x) \epsilon [0,T] \times \Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), x \epsilon \Omega \\ u(t,x) = g(t,x), x \epsilon [0,T] \times \partial \Omega \end{cases}$$

其中，u 为未知函数，也就是我们需要求的函数，受时间变量 t 与空间变量 x 影响；∂Ω 为空间 Ω 的边界。我们需要求解函数 u 在整个空间中的值，为此，使用神经网络 u_θ 来近似函数 u，θ 为神经网络的参数。而寻找参数 θ 即为构造一个优化问题，使得对每一个输入的变量组 (t, x)，$\left| u_\theta(t,x) - u(t,x) \right|$ 的值都要尽可能接近 0。

接着，我们定义损失函数 $J(u_\theta)$，其由方程，初始条件和边界条件带来的误差构成，即：

$$J_1 = \left\| \partial_t u_\theta + L u_x \right\|^2_{[0,T]\times\Omega}$$

$$J_2 = \left\| u_\theta(0,x) - u_0(x) \right\|^2_{\Omega}$$

$$J_3 = \left\| u_\theta(t,x) - g(t,x) \right\|^2_{[0,T]\times\partial\Omega}$$

$$J(u_\theta) = J_1 + J_2 + J_3$$

而接下来的过程就是求 $J(u_\theta)$ 的最小值，可以采用梯度下降等方法，不断更新 θ 的值直至收敛。

通过已有的算例和结果不难看出，此方法的求解速度快，精度高，且步骤较为简单，因此被广泛使用在求解低雷诺数下的 PDE 系统。

但在高雷诺数下，全连接物理信息神经网络有时根本无法训练 [2]，神经网络存在局限性，其在构造和计算微分方程的损失函数时，粘性效应忽略不计，扰动无法被抑制，从而可能导致神经网络失效，以至于微分方程失去稳态。

二、基于几何自适应物理信息的神经网络求解方法

基于上述讨论，我们提出一种新的物理几何自适应神经网络构架，来解决非均匀网格和不规则几何的问题 [3]。其主要思想是通过坐标变换的方式，使解域从不规则的物理域映射到矩形参考域，从而让网络恢复作用。此外，这种构架可以再参考域上重新构造约束优化，进行预先计算，且不会引入误差。

故定义如下参数稳定偏微分方程系统：

$$F(u,\nabla u,\nabla^2 u,\ldots,\mu)=0$$
$$G(u,\nabla u,\nabla^2 u,\ldots,\mu)=0$$

其中 F(•) 表示偏微分方程算子，定义在物理域 Ω_p上，而偏微分方程的解用 u(x) 表示。∇是关于 x 的梯度算子；G(•) 表示边界条件函数，在参考域 $\partial\Omega_r$上实行。我们可以用卷积神经网络构架近似模拟矩形域上的离散解场 u(x，μ(x))，即：

$$u(X,\mu(X))\approx u^{cnn}(X,\mu(X);\tau)$$

其中 $X=\{x_1,\ldots,x_{n_g}\}$表示一组均匀间隔 n_g的固定网格点，$\tau=\{y^k\}_{k=1}^{n_k}$是一组用于卷积计算的可训练滤波器。则第 k 个 conv 层的输出 $g^k(x)$可以表示为：

$$g^k(x)=\emptyset((g^k\odot y^k)(x)),x\in X^k$$

其中

$$(g\odot y)(x)=\int_X g(x-x')\gamma(x')dx'$$

接着，可以通过最小化训练集 $\{\mu_i,u_i^d\}_{i=1}^{n_d}$上的代价函数来训练卷积神经网络

$$L_{data}=\min_\tau\sum_{i=1}^{n_d}\|u^{cnn}(X,\mu_i;\tau)-u_i^d(X)\|_{\Omega_p}$$

而 Ω_p和Ω_r坐标之间的映射关系可以被定义为：

$$x=\hbar(\xi),\xi=\hbar^{-1}(x)$$

其中，h：$\Omega_r\to\Omega_p$表示正向映射，h^{-1}：$\Omega_p\to\Omega_r$表示逆映射；$x\in\Omega_p$和 $\xi\in\Omega_r$分别表示物理域和参考域的网格坐标。

由于可以在任何几何体的物理域中指定非均匀网格，并且映射到参考域的几何体是均匀分布的，因此映射变换是一对一的。但是，考虑到 h 的形式或可能不会变换，因此需要数值近似，并且椭圆方程的边界条件在两个域上都给出，因此考虑椭圆坐标映射。

所谓二维椭圆变换，就是考虑一个由四条边限定的不规则域 $\partial\Omega_p^i(i=1,2,3,4.)$，以及其对应的参考域：一个以边为界的矩形 $\partial\Omega_r^i(i=1,2,3,4.)$，又因为一一映射，因此有：

$$\xi(x)=\xi_b,\forall x\in\partial\Omega_p^i,i=1,2,3,4.$$

这种新方法引入了基于卷积的物理信息神经网络，用于求解没有标记数据的不规则域上的参数偏微分方程。它通过引入椭圆映射来表示不规则物理域和规则参考域之间的变换，从而使经典的卷积神经网络能够直接应用于非矩形几何和非均匀网格。相比于传统的物理信息神经网络，基于卷积的物理信息神经网络的收敛速度更快，精度也更高。这种方法在解决高雷诺数的 Burgers 方程等问题上表现出了很好的效果，能够学习到高雷诺数下 Burgers 方程的复杂动态行为，从而实现高效、准确的数值求解。

结束语：

本文深入探讨了神经网络求解 PDE 系统，尤其是在高雷诺数下，基于 CNN 的 Burgers 方程问题的稳定性情况。研究发现，处理高雷诺数 Burgers 方程时，采用 CNN 结构能提高系统稳定性和收敛性能。相比基于 FNN 的网络，基于 CNN 的物理信息神经网络具有更好的并行性、泛化能力和计算效率。因此，对于高雷诺数 Burgers 方程等物理问题，基于 CNN 的物理信息神经网络通常能够提供更优异的性能和效率。

参考文献：

[1]J.Sirignano,K.Spiliopoulos,DGM:a deep learning algorithm for solving partial differential equations,[J],Computer.Phys.375 (2018)1339 - 1364.

[2]K.Hornik,M.Stinchcombe,H.White, Multilayer feedforward networks are universal approximators,[J],Neural Network.2(5)(1989) 359 - 366.

[3]Han Gao,Luning Sun,Jian-Xun Wang PhyGeoNet:Physics-informed geometry-adaptive convolutional neural networks for solving parameterized steady-state PDEs on irregular domain,[J],Comput Phys 428 (2021) 110079.

基金项目：江苏省高等学校大学生创新创业训练计划项目（批准号：202211117120Y）。

作者简介：*通讯作者：王月超 (1999.12-)，男，汉族，江苏扬州，硕士学位，研究方向为“偏微分方程数值解法、计算 / 应用数学”。