逆向生长点 把握根与源
——2024 年高考数学新课标 I、II 卷题源分析

马宇阳　张渝佶
西南大学教师教育学院　重庆　400715

摘　要：基于 2024 年新课标试题的题源分析，不难发现，教材例习题以及以往高考数学试题中总能发现试题的“原型”或“影子”。新课标试题既注重把握数学本质属性，考查学生对数学基础知识及数学基本思想方法的掌握与领会，又强调在题目背景、条件、题设、结论等方面进行创新，考查学生的应用意识与推理能力；既引导师生回归教材，以教材为本，又整合往年高考试卷，把握命题规律，探寻试题本源。

关键词：高考数学；教材研究；题源分析

绪　论：

高考数学一直以来饱受关注 [1]。高考命题始终坚持“价值引领、素养导向、能力为重、知识为基”的理念 [2]，关注能力考查和人才选拔 [3]，落实“一核、四翼、四层”的评价体系。近年来，越来越多数学教育工作者关注高考命题规律以及解题通性通法，力求为高考复习找到一条普适之路，但忽略了对试题本源的分析。选题是问题教学的起始点，数学问题教学需要引导学生关注数学问题的本源，培养他们对数学问题原始信息的捕捉和处理能力 [4]。教材是高考试题的“母题库”[5]，是高考数学试题命制的原始材料。以 2024 年全国高考数学新课标 I 卷和 II 卷为例，分析发现当前高考数学试题回归教材，关注学生的基础知识与基本素养，意在考查学生对数学概念的理解以及知识之间的相互联系，精准把握学生最近发展区的同时，渗透数学思维与创新。

高考试题的生长点常常是教材本身，因此探究高考试题的题源具有备考价值。教材题源通常指教材中的例题、练习、习题、阅读与思考材料等。此前有学者从教材习题出发，研究其到高考题的命题途径 [6]，本文则逆向分析，基于高考题，追根溯源分析其在教材中的来源。

一、基于教材的题源分析

本文主要以全国范围内广泛使用的高中数学人教 A 版教材为题源分析对象，由于篇幅限制，选取部分 2024 年新课标试题（以下简称“试题”）作为典型例题。

（一）试题题设完全来源于教材

经过试题分析以及教材研读，发现部分试题的考查对象、设问方式、解题思路甚至是数据条件完全源于教材，这里简称为“零变换”。

例 1（2024 年新课标 I 卷第 7 题）

当 $x\in[0,2\pi]$ 时，曲线 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin(3x-\frac{\pi}{6})$ 的交点个数为（　）

A. 3　　B. 4　　C. 6　　D. 8

【解析】本题基于正弦型函数的图象及其运用，考查学生数形结合能力，难度较低。在同一坐标系中，作出函数 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin(3x-\frac{\pi}{6})$ 在 $x\in[0,2\pi]$ 的图象，由图象可知，当 $x\in[0,2\pi]$ 时，曲线函数 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin(3x-\frac{\pi}{6})$ 的交点个数为 6 个．故选 C．

题源 1（人教 A 版必修一 237页例 1）

画出函数 $y=2\sin(3x-\frac{\pi}{6})$ 的简图．

【分析】例 1 基于教材中的例题——画出函数 $y=2\sin(3x-\frac{\pi}{6})$ 的图象，结合 $y=\sin x$ 的图象，生长融合为两个函数交点问题。考查了学生函数图象的绘制能力以及准确判断函数走向趋势和关键点坐标的能力，更加综合和全面。在日常教学中，教师可通过以教材中某一道基础题为载体，进行改编设计，融合重构，从而让学生感受到教材中习题的“平中见奇”、“鲜活灵动”，感知数学知识的整体性和关联性，开拓思维的宽度，挖掘思维的深度。

（二）试题设问结构来源于教材

部分试题仅仅改变题干条件，而考查对象、设问方式、解题思路源于教材，简称为“变条件”。

例 2（2024 年新课标 II 卷第 5 题）

已知曲线 $C:x^2+y^2=16\ (y>0)$，从 C 上任取一点 P 向　轴作垂线 PP'，P' 为垂足，则垂线段 PP' 的中点 M 的轨迹方程为（　）

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1\ (y>0)$　　B. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1\ (y>0)$

C. $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1\ (y>0)$　　D. $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1\ (y>0)$

【解析】本题考查代入法求轨迹方程，难度较低．设 $M(x_0,y_0)$，则 $P'(x_0,0)$，由题意及中点坐标公式得 P 点坐标 $P(x_0,2y_0)$，因为点 P 在曲线 $C:x^2+y^2=16(y>0)$ 上，利用代入法可得 $x_0{}^2+4y_0{}^2=16(y_0>0)$，故线段 PP' 的中点 M 的轨迹方程为 $x^2+4y^2=16(y>0)$，即 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1(y>0)$．故选 A．

题源 2（人教 A 版选择性必修一 108 页例 2）

在圆 $x^2+y^2=4$ 上任取一点 P，过点 P 作 x 轴的垂线段 PD，D 为垂足．当点 P 在圆上运动时，线段 PD 的中点 M 的轨迹是什么？为什么？

【分析】例 2 属于考查轨迹方程类题目，是解析几何板块中典型题型之一，也是高考的热点题型。其与教材人教 A 版选择性必修一 108 页的例 2 除了一个数据不同，其余题目条件几乎完全一模一样，考查学生对函数的理解度以及重要的数学转化思想。也足以看出教材中习题的重要性以及该知识点的重要性。

（三）试题考查对象来源于教材

部分试题仅仅调整了教材中考查对象的位置，即条件与结论互换，而解题思路以及公式定理的应用与教材习题一致。

例 3（2024 年新课标 I 卷第 4 题）

已知 $\cos(\alpha+\beta)=m$，$\tan\alpha\tan\beta=2$，则 $\cos(\alpha-\beta)=$（　）

A．$-3m$　B．$-\dfrac{m}{3}$　C．$\dfrac{m}{3}$　D．$3m$

【解析】本题主要考查了三角函数基本关系及和差角公式的应用，难度较低．由两角差的余弦公式可得 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=m$，由同角三角函数基本关系 $\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=2$ 可得 $\sin\alpha\sin\beta=2\cos\alpha\cos\beta$，所以 $\cos\alpha\cos\beta=-m$，$\sin\alpha\sin\beta=-2m$，于是 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-3m$．故选 A．

题源 3（人教 A 版必修一 255 页第 15 题（1）小问）

已知 $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{5}$，$\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{3}{5}$，求 $\tan\alpha\tan\beta$ 的值．

【分析】例 3 较为常规，简单考查学生对两角和与差的余弦公式以及“切化弦”数学方法的理解与掌握。此题与人教版数学教材必修一 255 页的第 15 题（1）小问极为相似，两题仅是条件与设问互换位置的关系，体现高考对基础试题的考查注重理解和运用。另外，教材中使用的是具体的数据，高考题中抽象成了参数 m，能同时考查到学生的数学抽象思维，拨开表面，感悟数学的抽象性和变通性。

（四）试题命题背景来源于教材

部分试题引用教材中的某些知识作为命题背景，看似云里雾里，实则拨云见日，所考查的数学概念、解题思想较为常规。

例 4（2024 年新课标 I 卷第 8 题）

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$f(x)>f(x-1)+f(x-2)$，且当 $x<3$ 时，$f(x)=x$，则下列结论中一定正确的是（　）

A．$f(10)>100$　　B．$f(20)>1000$

C．$f(10)<1000$　　D．$f(20)<10000$

【解析】本题以斐波那契数列为背景，考查数学抽象思维以及运算求解能力，难度适中．由于选项所求函数自变量均为正整数，不妨设 $a_n=f(n)$，$n\in n^+$，由题可知，当 $n<3$ 时，$a_n=n$，即 $a_1=1$，$a_2=2$；当 $n\geq 3$ 时，$a_n>a_{n-1}+a_{n-2}$，即 $a_3>a_2+a_1=3$，$a_4>a_3+a_2=5$，以此类推，$a_5>8$，$a_6>13$，$a_7>21$，$a_8>34$，$a_9>55$，$a_{10}>89$，$a_{11}>144$，$a_{12}>233$，$a_{13}>377$，$a_{14}>610$，$a_{15}>987$，$a_{16}>1597$，$a_{20}>2584$……，即 $f(10)>89$，$f(20)>1000$，由于 $f(10)>89$ 无法准确判断 $f(10)>100$ 与 $f(10)<1000$，故选 B

题源 4（人教 A 版选择性必修二 10 页）

阅读与思考：斐波那契数列

【分析】例 4 看似在考查函数，实则仔细观察发现，$f(x)>f(x-1)+f(x-2)$ 与斐波那契数列 $F(n)=F(n-1)+F(n-2),(n\geq 3)$ 极为相似，仅仅是将“=”替换为“>”，而数列本质上也是函数，是特殊的离散型函数，因此例 4 在解答时可以采用数列递推的思路，便可轻松完成作答。教材将“斐波那契数列”放在了“阅读与思考”栏目，作为数学文化让学生阅读，也反过来引导教学应当注重对课后板块的研读。让斐波那契数列化为学生心中一道亮丽的风景线，让数学文化成为学生心中的歌。

（五）试题通性通法来源于教材

部分试题在通性通法上取自教材，是对教材解题思路的推广与延伸，也是对高中数学重点题型的总结与归纳。

例 5（2024 年新课标 I 卷第 19 题）

设 m 为正整数，数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$ 是公差不为 0 的等差数列，若从中删去两项 a_i 和 $a_j\ (i<j)$ 后剩余的 $4m$ 项可被平均分为 m 组，且每组的 4 个数都能构成等差数列，则称数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$ 是 (i,j)——可分数列．

（1）写出所有的 (i,j)，$1\leq i<j\leq 6$，使得数列 $a_1,a_2,\cdots,a_6$ 是 (i,j)——可分数列；

（2）当 $m\geq 3$ 时，证明：数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$ 是 $(2,13)$——可分数列；

（3）从 1, 2, ⋯, $4m+2$ 中一次任取两个数 i 和 $j\ (i<j)$，记数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$ 是 (i,j)——可分数列的概率为 P_m，证明：$P_m>\dfrac{1}{8}$．

【解析】本题考查了数列新定义问题、排列组合问题、古典概型，作为整张试卷的压轴，难度较大．第（1）问直接根据 (i,j)——可分数列的定义写出所有的 (i,j) 为 $(1,2)$，$(1,6)$，$(5,6)$；第（2）问先证明当 $m=3$ 时，$a_1,a_2,\cdots,a_{14}$ 是 $(2,13)$——可分数列，再证明 $m>3$ 时，数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$ 去掉 a_2 和 a_{13}，前三组按照　　时的分法，后面每四个相邻的项分为一组，即 $a_{15},a_{16},a_{17},a_{18}$、…、$a_{4m-1},a_{4m},a_{4m+1},a_{4m+2}$，每一组都能构成等差数列，故而数列 a_1，a_2，…，a_{4m+2} 是 $(2,13)$——可分数列；第（3）问先证明当 $m=1$ 时，数列

$a_1,a_2,\cdots,a_6$ 为可分数列的概率为 $P_m=\frac{3}{C_6^2}=\frac{1}{5}>\frac{1}{8}$，当 $m=2$ 时，数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$ 为可分数列的概率为 $P_m=\frac{7}{C_{10}^2}=\frac{7}{15}>\frac{1}{8}$，再结合排列组合的知识以此类推，可得 $P_m\geq\frac{m^2+m+1}{C_{4m+2}^2}=\frac{m^2+m+1}{(2m+1)(4m+1)}=\frac{m^2+m+1}{8m^2+6m+1}>\frac{1}{8}$．

题源 5（人教 A 版选择性必修二 18 页第 5 题）

已知一个无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差为 d．

（1）将数列中的前 m 项去掉，其余各项组成一个新的数列，这个新数列是等差数列吗？如果是，它的首项和公差分别是多少？

（2）取出数列中的所有奇数项，组成一个新的数列，这个新数列是等差数列吗？如果是，它的首项和公差分别是多少？

（3）取出数列中所有序号为 7 的倍数的项，组成一个新的数列，它是等差数列吗？你能根据得到的结论作出一个猜想吗？

【分析】例 5 以数列为考查对象，参考了教材习题中“删项”的做法，对所给数列“加工”形成了新数列。例 5 去掉了第 i 和 j 项，而教材习题依次去掉“前 m 项”、“奇数项”、“7 的倍数项”，设问条件不同，但解法类似，只需按照新数列的定义，逐项递推即可。二十世纪八十年代，高考数学题常常以数列作为压轴题，后来的全国课标卷以及地方卷，导数、圆锥曲线的压轴之风盛行，而 2024 年新课标卷Ⅰ、Ⅱ卷推陈出新，将数列结合新情境作为压轴，新情景下的递推数列再次成为热点。这种将最基本的知识点与其他知识点相结合形成新的题目的做法，继承传统而又打破传统，体现了弗赖登塔尔的“再发现”、“再创造”思想，也体现了高考试题“能力立意”的命题原则。

二、基于以往高考试题的题源分析

除了教材题源之外，2024 年新课标试卷还以过去的高考试题为源来命制，在近几年高考数学试题中也能发现它们的身影。下面以其中一道概率与统计解答题为例。

例 6（2024 年新课标Ⅰ卷 18 题）

某投篮比赛分为两个阶段，每个参赛队由两名队员组成，比赛具体规则如下：第一阶段由参赛队中一名队员投篮 3 次，若 3 次都未投中，则该队被淘汰，比赛成绩为 0 分；若至少投中一次，则该队进入第二阶段，由该队的另一名队员投篮 3 次，每次投中得 5 分，未投中得 0 分，该队的比赛成绩为第二阶段的得分总和．

某参赛队由甲、乙两名队员组成，设甲每次投中的概率为 p，乙每次投中的概率为 q，各次投中与否相互独立．

（1）若 $p=0.4$，$q=0.5$，甲参加第一阶段比赛，求甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分的概率；

（2）假设 $0<p<q$，

（i）为使得甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率最大，应该由谁参加第一阶段的比赛？

（ii）为使得甲、乙所在队的比赛成绩的数学期望最大，应该由谁参加第一阶段的比赛？

【解析】本题为较常规的概率统计类应用题，放在 18 题位置难度适中，对学生逻辑推理能力和运算能力作考查。理解和分析题目可以发现，对于第（1）问，主要考查相互独立事件概率乘法公式，考虑对立的情况可以发现能更简单快速得到答案，即 $P=(1-0.6^3)(1-0.5^3)=0.686$；第（2）问的（i）问进行分类讨论，分别分析出甲、乙参加第一阶段比赛的概率，再用作差法比较大小即可，（ii）问实质上为离散型随机变量的数学期望问题，仅需在分别求出相应的概率的基础上计算出期望就能作比较得到答案。

题源 6-1（2023 年新课标Ⅰ卷 21 题节选）

甲、乙两人投篮，每次由其中一人投篮，规则如下：若命中则此人继续投篮，若未命中则换为对方投篮．无论之前投篮情况如何，甲每次投篮的命中率均为 0.6，乙每次投篮的命中率均为 0.8．由抽签确定第 1 次投篮的人选，第 1 次投篮的人是甲、乙的概率各为 0.5．

题源 6-2（2021 年新课标Ⅰ卷 18 题节选）

某学校组织“一带一路”知识竞赛……

（1）若小明先回答 A 类问题，记 X 为小明的累计得分，求 X 的分布列；

（2）为使累计得分的期望最大，小明应选择先回答哪类问题？并说明理由．

【分析】结合往年试题分析发现，例 6 题干背景与 2023 年新课标Ⅰ卷 21 题相似，均采用“投篮”情景设置应用题，考查学生概率部分知识的掌握情况。同时例 6 第（3）问在设问上与 2021 年新课标Ⅰ卷 18 题设问相似，均考查离散型随机变量的数学期望，解法相同。这种“换汤不换药”的出题风格在历年高考试题之间都有身影，能有效提醒教师与学生在日常教学与学习中时刻关注高考题，究其本源，把握本质。既要学会适应变化，也要捕捉变中不变，紧跟高考风向标。

结束语：

关注题源，分析题源，具有一定的理论价值与实践价值，具体来说：一是凸显命题规律，明确当前高考数学的考查重点，把握考风考向；二是指向复习备考，引导教师教学和学生学习有目的地回归教材，彰显教材资源的重要价值和功能；三是立足未来发展，对高考试题多角度、多方面、多层次的研究，有助于丰富数学教育理论体系。

参考文献：

[1] 梁玮 , 徐斌艳 , 于文宇 . 近二十年国内数学高考研究进展与启示——基于 CiteSpace 的可视化分析 [J]. 数学教育学报 , 2023,32(02):18-23+36.

[2] 教育部考试中心．中国高考评价体系说明 [M]．北京：人民教育出版社，2019:1.

[3] 任子朝，莫春晖，陈昂 . 高考数学能力层次和考查效度研究——潜变量路径分析的应用 [J]. 中国考试，2012(7):3-8.

[4] 方均斌 , 梁凯 , 朱玲 . 数学问题教学的五个探索点 [J]. 数学教育学报 , 2016,25(01):47-50.

[5] 郑观宝 . 一道高考试题的类比探究与题源探究 [J]. 数学通报 , 2011,50(10):59-61.

[6] 曹凤山 . 从课本例 (习) 题到高考题的若干命题途径 [J]. 中学教研 (数学), 2012,(01):26-28.