

数学课程教学中融入数学建模路径研究与实践探索

陈 聪

武警工程大学基础部 陕西 西安 710086

摘 要:数学建模是搭建实际问题与数学理论之间桥梁的有效工具,在院校基础数学课程中融入数学建模对培养学生的创新能力至关重要。本文从数学课堂教学、建模俱乐部、数学建模竞赛三个方面进行分析,给出在数学课程中融入数学建模的教学实践路径。实践表明,在数学课程中融入数学建模极大地提升了学生的学习兴趣、创新思维能力、实践应用能力。

关键词:课堂教学;建模俱乐部;数学建模竞赛;创新思维

引 言:

现代竞争已经不再是单纯的人力比拼,而是科技实力的较量,是具备创新精神和实践能力、具有较强社会责任感的高素质人才的竞争。科技让竞争变得更加高效,也更加复杂。而数学在自然科学、工程科学、社会科学等各个领域发挥的重要作用日益凸显。鉴于学生学习数学的过程往往比学习的内容更为重要,数学教育不仅要为学生提供数学内容基础,更要让学生接触数学方法,积累数学经验。

著名的科学院院士李大潜说:数学建模是开启数学大门的金钥匙。数学建模是联系数学与应用的重要桥梁,是数学走向应用的必经之路^[1]。为此,教师应该更注重将信息化教育技术、数学软件、数学建模与数学基础知识深度融合,创新教学思路 and 教学模式,这不仅需要数学建模思想来提升学生思维能力和科学计算能力,也需要高效发挥建模俱乐部的优势,逐步培养学生跨学科、跨领域交叉研究学习的意识,提升学生运用数学分析、解决实际问题的创新实践能力,更需要通过数学建模竞赛来进一步检验学生的融合式创新能力,提高人才培养质量。

一、以数学课堂为依托,培养学生的创新思维

院校是高等教育人才培养的摇篮,课堂是人才培养的主阵地。在院校传统的数学课程教学中,从定义、性质、定理到计算的填鸭式的教学方式使得数学课堂相当枯燥乏味,学生学习兴趣不高,导致教学效果不明显,学生的应用能力提升太慢。

(一) 重构教学内容,激发学习兴趣

传统的大学数学课堂教学内容的授课顺序一般是先讲理论知识点的概念、性质、定理,然后推导证明,课后学生需要经过大量练习题再通过案例应用该理论。而重构以后的教学内容首先是引出社会生活、科技发展、大国博弈、过往数学建模竞赛题目等方面存在的一个现实问题,进而分析解决问题所需要的相关数学基础理论、定理,以信息技术、数学软件等数字资源为辅助,加强学生对基础内容的理解,并利用相关知识解决该现实问题,之后将相应的数学理论知识进行应用拓展。学生在此过程中能够深刻感受到数学的应用价值和魅力,逐渐产生浓厚的学习兴趣和强烈的求知欲,改变了对数学的偏见。

(二) 改进教学方法,培塑创新思维

由于数学课程理论性强且内容抽象,传统课堂以教师为主体,使用讲授式进行满堂灌,基础好的学生能够较快理解教学内容,尽管考试也能够取得优异成绩,但学生数学实践应用能力未能有效激发,创新意识不够,而数学基础薄弱甚至一般的学生学习吃力,极易产生畏难情绪,逐渐产生厌学心理。在融入数学建模思想之后,

教师精心优化教学设计,数学课堂坚持“以教师为主导,学生为主体”的教学理念、“以学生发展为中心”的原则,课上注重以问题为牵引,以启发式、探究式结合讲授式的教学方法进行教学改革,课后布置开放式作业,鼓励学生以小组合作形式查阅资料后完成,培塑学生创新思维的同时培养其实践能力。

(三) 有效利用信息技术,提升学习质效

技术赋能教育,教育塑造未来^[2]。新时代的竞争是人才与技术的交锋,为加快新质战斗力生成,大国博弈对人才的知识结构、认知水平、能力生成都提出了更高要求。具备持续迭代的科技创新力,自觉运用现代科技手段认识、处理和解决实际问题,借助AI赋能人才培养质量,是造就拔尖创新领军人才、提升科技战斗力的必经之路。人工智能、大数据、云计算等信息技术的发展,基于知识图谱的自适应学习能够整合碎片化的知识,重构知识间的关联,面对不同专业、不同基础学生的差异性,打造分层分类的融数学建模思想、数学软件、信息化技术“三元一体”的创新型教学模式,提高学生学习效率。

案例分析:可降阶的高阶微分方程——《高等数学》

课前:向学生推送常微分方程相关微课、慕课视频,以及“可降阶的高阶微分方程”、“常微分方程在数学建模中的应用”两篇文献,供学生课前进行有效预习,对所学内容心中有数,提高学习效率。

课中:首先以电影中常见的子弹穿墙问题为引例,创设情景,引发思考,激发学生的学习兴趣,引导学生

对实际问题进行深入分析并建立微分方程模型。

引例 你看过电影中子弹穿墙的瞬间吗？子弹穿过墙体后由于受到墙的阻力，速度会下降很多，能否从数学角度描述子弹穿过墙体的运动规律呢？

不妨假设子弹以 200m/s 的速度射进厚度约为 0.1m 的墙，受到的阻力与速度平方成正比，若子弹出墙速度为 80m/s，能否计算出子弹穿墙所需时长？^[3]

模型假设 假设子弹穿墙过程中除了受墙体阻力作用外，没有其他任何作用力；

模型建立 以入射方向为 x 轴、子弹与墙体接触点为原点，经过时间 t_1 后穿出墙体，由牛顿第二定律易得 $m \frac{d^2x}{dt^2} = -k \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$

初始条件为， $x(0)=0$ 、 $x'(0)=200$ 、 $x(t_1)=0.1$ 、 $x'(t_1)=80$

问题 1：上述方程如何求解？

接下来，为了对该模型进行求解，以问题为牵引来探究此类微分方程的求解方法，引出本节课的主题——可降阶的高阶微分方程。

问题 2：写出二阶微分方程的一般形式？

问题 3：如何求解 $y^{(n)} = f(x)$ ？

问题 4：逐次积分方法适用于哪种形式的微分方程，使用该方法时需要注意什么？

课堂上通过层层递进设问，引导学生分析和探究，结合已有知识基础最终得到形如 $y'' = f(x, y')$ 类微分方程的一般求解方法^[4]：

分析： 设 $y' = p$ ，则 $y'' = \frac{dp}{dx} = p'$ ，方程化为 $p' = f(x, p)$ ，恰好是关于 x ， p 的一阶微分方程。若能够求得通解 $y' = p = \varphi(x, C_1)$ ，则可通过再次积分得原方程的通解 $y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2$ 。

模型求解（引例） $m \frac{d^2x}{dt^2} = -k \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$

步骤一（代换）：设 $\frac{dx}{dt} = p(t)$ ，

步骤二（降阶）：则 $mp' = -kp^2$ ，

步骤三（求解）：分离变量，得 $\frac{dp}{p^2} = -\frac{k}{m} dt$ ，

积分得 $-\frac{1}{p} = -\frac{k}{m} t + C_1$ ，代入初始条件， $p(0)=200$ 可

得 $C_1 = -\frac{1}{200}$ 。

从而， $p(t) = x'(t) = \frac{1}{\frac{k}{m}t + \frac{1}{200}}$ ，再次积分，即得

$x(t) = \frac{m}{k} \ln \left(\frac{k}{m}t + \frac{1}{200} \right) + C_2$ ，

代入初始条件 $x(0)=0$ 得 $C_2 = \frac{m}{k} \ln 200$ ，因此原方程的特解为

$x(t) = \frac{m}{k} \ln \left(\frac{200k}{m}t + 1 \right)$

最后代入已知条件 $x(t_1)=0.1$ 、 $x'(t_1)=80$ ，知

$$\begin{cases} \frac{m}{k} \ln \left(\frac{200k}{m}t_1 + 1 \right) = 0.1 \\ \frac{1}{\frac{k}{m}t_1 + \frac{1}{200}} = 80 \end{cases}$$

解代数方程组得 $t_1 = \frac{3}{4000 \ln 2.5} \approx 8.1852 \times 10^{-4}$ ， $\frac{k}{m} = 10 \ln 2.5$ 。

进一步，将微分方程模型中可降阶的高阶微分方程的求解方法拓展至生活领域，引导学生思考经典数学问题，发现数学之美，锻炼学生数学建模能力，再次巩固可降阶的高阶微分方程的求解方法。

（悬链线问题） 2018 年“致敬达·芬奇”全球光影艺术体验大展的北京站和上海站都吸引了近千万观众，在国内的宣传海报上呈现的是达·芬奇的一幅名画《抱银貂的女人》，达·芬奇曾考虑图片中的女子所戴的项链是什么形状，即：固定项链的两端，使其在重力作用下自然下垂，项链所形成的曲线方程是什么？^[5]

模型假设

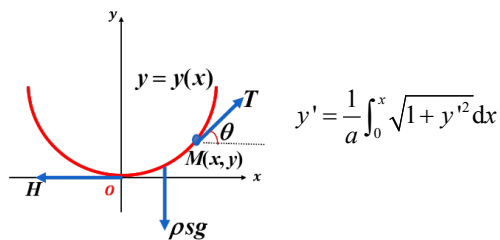
为求悬链线方程，作以下假设：

1. 悬链悬挂在两点之间，靠自身重量悬挂。
2. 悬链是灵活的，有一个统一的线性重量密度。

模型建立 为了简化代数上的繁琐，我们让 y 轴通过曲线的最小值。从最小值到点 $M(x, y)$ 的弧段长度用 s 表示。作用在线段上的三个力分别为张力 H 和 T 以及它自身的重力（见下图）。此图包含计算中使用的参数和变量。

要使每一段在水平和垂直上达到平衡，必须满足以下两个条件： $T \sin \theta = \rho s g$ ， $T \cos \theta = H$ 。将此两式相除，得 $\tan \theta = \frac{1}{a} s$ ($a = \frac{H}{\rho g}$)。

由于 $\tan \theta = y'$ ， $s = \int_0^x \sqrt{1+y'^2} dx$ ，代入上式即得。



将上式两端对 x 求导，便得 $y = \varphi(x)$ 满足的微分方程

$$y'' = \frac{1}{a} \sqrt{1+y'^2} \quad (1)$$

且初值条件为 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=0$ 。

模型求解 下面来解方程 (1)。

方程 (1) 属于的 $y'' = f(x, y')$ 类型。设 $y' = p$ ，则

$y'' = \frac{dp}{dx}$ ，代入方程 (1)，并分离变量，得 $\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dx}{a}$ 。两端积分，得

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{x}{a} + C_1 \quad (2)$$

把条件 $y'|_{x=0} = p|_{x=0} = 0$ 代入 (2) 式, 得 $C_1 = 0$, 于是 (2) 式成为

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{x}{a}, \quad \text{解得 } p = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}), \quad \text{即 } y' = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}).$$

上式两端积分, 便得 $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) + C_2$. 将条件 $y|_{x=0} = 0$ 代入上式, 得 $C_2 = -a$. 于是该绳索的形状可由曲线方程 $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} - 2)$ 来表示. 这条曲线叫做悬链线.

最后, 分别借助 Geogebra 和 Matlab 软件将模型求解结果进行展示, 加深学生对悬链线的直观认识, 深入体会数学建模的价值和魅力.

课后: 引导学生课后经过小组讨论交流后, 以小组形式给出关于探测仪下沉速度问题的模型建立与求解的全过程, 并查阅资料, 验证求解结果的可靠度. 在此过程中, 学生团队协作能力以及实践能力逐步得以有效锻炼和提高.

(探测仪下沉速度问题) 在航海时经常要探测海中的障碍物, 需要将探测仪放入海中, 问探测仪下沉过程中其深度和速度的关系怎样? 假定探测仪在下沉过程中, 除了受重力作用外, 还受到阻力和浮力的作用. 设仪器的质量为 m , 体积为 V , 海水相对密度为 ρ , 仪器所受阻力与下沉速度成正比, 比例系数为 $k(k>0)$ [6].

二、以建模俱乐部为平台, 提高学生综合素养

(一) 打造第二课堂, 开设建模选修课

数学课程的初衷不只是培养基础理论研究人员, 更多的是培养数学基础扎实、思维能力活跃、综合素养丰富的应用型高素质人才, 能够运用数学理论对大国博弈等实际问题进行定量分析才是硬道理. 由于基础数学课程内容多课时少, 学生的数学综合素养与创新实践能力不易得到快速提升和检验, 在课堂教学之外, 组织开

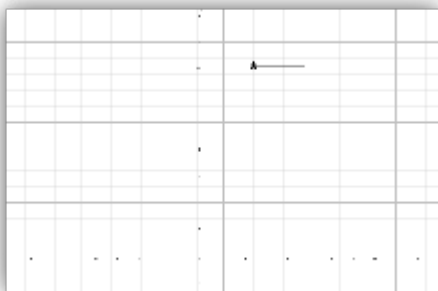
设数学建模俱乐部, 鼓励学生加入, 广泛开展数学建模选修课课程, 打造第二课堂, 教师结合以往竞赛真题, 针对基本数学建模算法和模型进行专题授课, 为学生创造交流平台, 积累建模知识, 了解各种类型的数学建模竞赛, 获得当前科技、大国博弈等前沿领域热点资讯, 进一步查漏补缺, 树立学习强国的远大抱负.

(二) 依托信息技术, 建设数字化培训资源

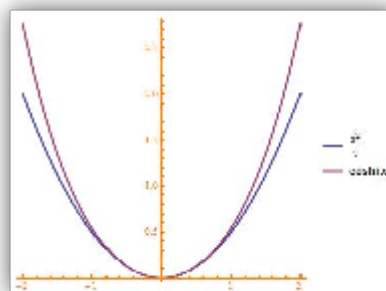
利用信息技术制作高质量的微课、在线课程, 其中涵盖建模算法理论、工具使用、经典案例分析等模块, 收集并整理真实建模案例以及往年数学建模竞赛优秀获奖作品, 作为教材或讲义, 供学生分析和思考, 便于学生进行个性化学习, 同时提供常用的建模软件, 如 Matlab、Python 等, 开设专门的软件操作课程, 教给学生高效使用这些软件进行数据处理、模型建立和结果分析. 利用在线平台鼓励学生提出问题、分享经验、交流学习心得, 创建积极的学习氛围, 并对学生提供个性化辅导. 建立有效反馈机制, 收集学生和同行教师的意见建议, 跟踪建模领域的发展动态和前沿技术, 定期更新建模培训资源, 如讲义、视频、PPT、案例库、软件版本等. 采用在线测试、作业提交、项目报告等多元化评估方式全面评价学生的学习能力和成果, 设计奖励机制, 敦促学生积极参与学习和实践.

(三) 邀请专家辅导, 助推学生能力提升

数学建模就是对现实生活中实际问题的求解, 因为实际问题往往变量多, 影响因素多, 很难用一个数学式子精确表示, 即便能精确表示也无法求得其精确解, 因而通过数学理论的简化、概化, 将其转化为数学模型, 进而借助计算机寻求模型的数值解, 而这些模型就是实际问题的近似解 [7]. 而这些近似解是否符合实际情况, 还需经过相关领域专家进行评判. 由于大部分数学课程教师多年奋斗在一线教学岗位, 对当前科技热点问题以及大国博弈实践缺乏深入了解, 为此定期邀请知名高校数学建模领域的专家来校进行讲座和辅导, 为学生指点



悬链线 Geogebra 动图



悬链线 Matlab 图示

迷津,拓宽学生视野,指引后期努力方向,助推学生综合能力提升。

三、以建模竞赛为抓手,提升高素质人才培养质量

(一) 举办校赛,激发兴趣,锻炼团队协作能力

基础数学课程理论性强,难度较大不易理解,通过建模中的实际问题学生可深切体会数学的重要性,激发学习兴趣,增强主观能动性。另外,学生需要具备一定的数学功底以及思考问题、分析问题的能力才能应用于解决实际问题,与此同时,学生日常学习中积累的综合知识需要结合具体建模问题才能得以升华,为此每年举办至少一次校内建模竞赛极有必要,实战化模拟竞赛真实环境,学生熟悉竞赛流程,每个队员发挥自身优势,明确责任,利用现代信息技术,提高团队协作效率,培养参赛队员的集体荣誉感和归属感,锻炼团队协作能力。

(二) 挑战国赛,检验水平,提升创新实践能力

数学建模是运用数学建模技术,并辅之以计算机仿真实验来解决现实世界各领域中的实际问题^[8]。历年全国大学生建模竞赛题目取材于经济学和金融、生物学和环境科学、工程学、物理学等领域的实际问题,要求学生能够建立相应数学模型,对大量数据信息进行量化分析和仿真检验,得出准确合理的判断,为做出正确决策提供基本参考和精准对策建议。学生通过全国大学生数学建模竞赛,一方面充分了解当下大国博弈中的前沿、焦点等亟待解决的实际问题,围绕问题的解决,将不同领域的知识、概念、理论有机结合,形成独特的专业思维和跨学科思维模式,树立学习强国的雄伟壮志,另一方面将自己积累的理论知识有效应用于实践中,有效促进了院校教育与社会实践的沟通、交流、合作,同时检验学生自身的综合能力水平,便于查漏补缺,进而不断学习、持续积累,递阶式提升自身创新实践能力。

结 语:

当前,跨学科融合与创新成为推动科技进步的重要力量,数学建模为不同学科提供合作交流平台,促进知识间交叉融合,为解决实际复杂问题,如环保、交通、城市规划、大国博弈等,提供了新思路、新方法。通过数学建模,学生不仅可以锻炼逻辑思维能力、团队协作能力、创新应用能力,掌握数学建模基本方法和技能,也可以更加深入地了解社会现象和规律,进而提出更加科学合理的解决方案。另外,随着人工智能技术的蓬勃发展,数学建模在人工智能领域中的基础作用也越来越明显,现已广泛应用于机器学习和深度学习中,数学建模与人工智能将更加注重跨学科交叉融合,为数学建模领域带来更深远的影响和变革。总之,数学教育、信息技术与数学建模相互促进,共同推动数学学科发展和育人质量的提升。

参考文献:

[1] 李大潜.数学建模是开启数学大门的金钥匙[J].

数学建模及其应用,2020,9(1):1-8.

[2] 吴岩.深入实施教育数字化战略行动以教育数字化支撑引领中国教育现代化[J].高教研究.2023(11):5-10.

[3] 但琦.高等数学军事应用案例[M].北京:国防工业出版社,2018

[4] 同济大学数学系编.高等数学[M].第七版上册.北京:高等教育出版社,2014

[5] 储继讯,王萍.高等数学教学设计[M].北京:机械工业出版社,2019

[6] 但琦.高等数学军事应用案例[M].北京:国防工业出版社,2018

[7] 周婉娜,周根全.“新工科”背景下数学建模在数学类课程中的教学改革研究[J].2022(8):26-27.

[8] 卢建兵,夏柳舟.军事建模在部队作战训练中的应用探析[J].南昌陆军学院学报,2015(1):23-24.