

# 以可视化和实践为导向的线性代数课堂教学改革

## ——以《矩阵和矩阵乘法》为例

韦爱举<sup>1</sup> 谢莉<sup>1\*</sup>

桂林信息科技学院 广西 桂林 541004

**摘要:** 本文以矩阵及其乘法的教学为例,探讨了如何通过 manim 动画可视化展示、实际应用相结合的方式,优化线性代数教学内容,激发学生学习兴趣,提升其理解和应用能力。通过引入航天器姿态调整等实际案例,将抽象数学概念与工程应用联系起来,不仅培养了学生的创新思维 and 实践能力,还有效融入了课程思政教育,增强学生的社会责任感和科技自豪感。文章总结了教学实施中的经验与不足,并对未来教学改革方向提出了建议。

**关键词:** 矩阵乘法; 可视化教学; manim; 课程思政; 教学改革

### 引言:

近年来,线性代数教学改革不断深入,通过结合实际应用和创新教学方式,提升学生学习兴趣和能力<sup>[1]</sup>。矩阵是线性代数的核心内容之一,但其抽象性和复杂性常常让学生感到困难。传统教学方法以符号推导和公式记忆为主,缺乏直观性和趣味性。为解决这一问题,我们设计了一种以可视化和实践为导向的教学方案,通过 manim 动画演示和实际案例应用,使学生能够直观理解矩阵的几何意义及其在工程中的重要作用。可视化技术为数学教学带来了新的视角和方法,有助于学生直观理解抽象概念<sup>[2]</sup>。动画技术能够通过动态演示复杂过程,显著提升教学效果和学生参与度<sup>[3]</sup>。

本次教学实践改革基于 3b1b 的 Manim 库,这是全球广泛应用的开源项目,凭借其独特的可视化表达能力,帮助学生动态理解复杂的数学结构。借助这一技术,本课程从传统静态板书和 PPT 转向了动态化的内容呈现,增加了课堂的趣味性和创新性。基于 Manim 创作的可视化动画资源,风靡全球,深受广大学生欢迎。

本文中涉及的动画发布在 B 站。

### 一、教学目标

#### (一) 知识目标:

理解矩阵的基本概念,掌握矩阵乘法的运算规则及其几何意义。

理解矩阵作为线性映射的核心作用,并通过动画演示了解其空间变换特性。

#### (二) 能力目标:

通过动画和编程实践,提升学生将抽象数学概念应用于实际问题的能力。

鼓励学生运用 Python 代码进行矩阵运算,培养创新思维和动手能力。

#### (三) 思政目标:

通过航天器姿态调整案例,增强学生对国家科技事业的认同感和自豪感,激发社会责任感。

#### (四) 双创目标:

培养学生结合矩阵多重线性映射理解实际应用场景的创造性思维。

### 二、教学设计与实施

#### (一) 情境创设

由嫦娥六号月球探测器采样返回采用“半弹道跳跃式返回”创设情境,结合专家和文献的论述,提出问题“航天器如何调整姿态?”(图 1)引导拓展,课后

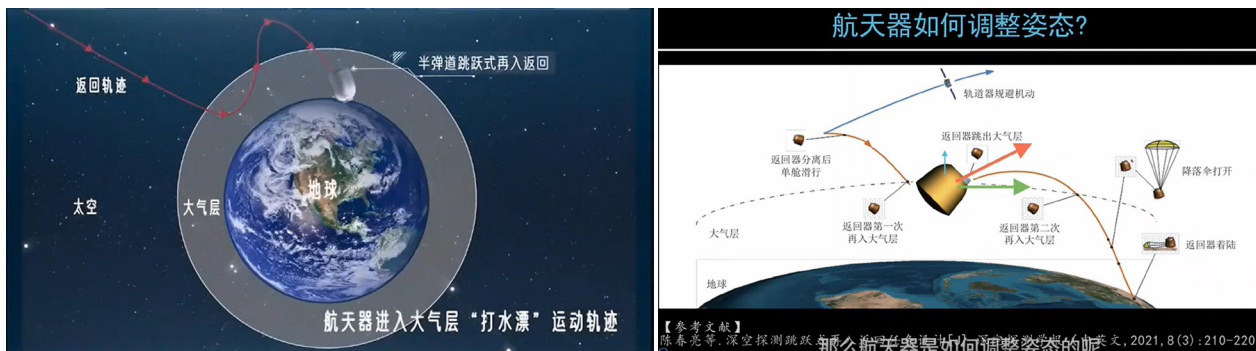


图 1 提出问题: 航天器如何调整姿态?

深入了解。

通过问题引入，融入课程思政：与航天器姿态调整引入课堂，有助于实现课程思政：

1. 爱国主义与科技创新精神：通过嫦娥六号的成功任务，展示了中国航天事业的重大突破，激发学生的民族自豪感，树立科技强国的理念，激励学生通过自身努力推动科技进步。

2. 科学精神与创新思维：结合专家的论述和文献的支持，引导学生理解科技创新过程中科学思维和严谨态度的重要性，培养学生的逻辑思维和问题解决力。

3. 工匠精神与精益求精：航天任务要求极高的精度和严密性，航天器姿态调整中的细节处理可以引导学生领悟到追求卓越和精益求精的工匠精神，树立严谨负责的学习态度。

4. 全球视野与共同发展：通过讨论航天技术的国际合作和影响，特别是在太空探索和科学研究方面的全球贡献，培养学生的国际视野，理解中国在全球科技发展中的角色与责任，强化“命运共同体”意识。

5. 批判性思维与问题解决能力：通过提出“航天器如何调整姿态”这一开放性问题，培养学生从文献和专家的论述中提取关键信息，运用科学知识思考问题，提升其批判性思维和自主学习能力。这样的情境创设有助于学生在学习科学知识的同时，内化思政教育的核心价值观，实现思政目标与专业知识的有机融合。

(二) 知识讲解与可视化演示

1. 图片的本质是矩阵



图 2 图片是一张矩阵

如一张嫦娥六号在月球留下中国印记的照片，就是一张数据矩阵，放大其中一个小部分，每个小网格对应一个颜色的数值，这些数值构成一个矩阵。矩阵有其相应的运算法则，其中最为重要的部分是矩阵的乘法。

2. 矩阵乘法是线性代数的运算核心

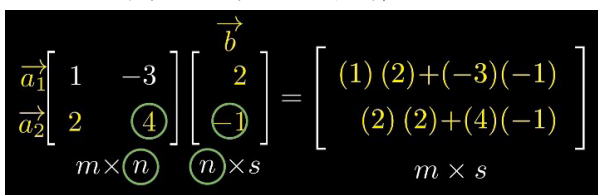


图 3 动画演示矩阵乘法

```
import numpy as np
A = np.array([[1, -3], [2, 4]])
B = np.array([[2], [-1]])
C = A @ B
print(C)
```

[[5],  
[0]]

图 4 用 python 计算矩阵

通过动画演示矩阵的乘法，解释运算法则，并进行课堂练习。实际问题中还是用计算机，比如使用 python，输入图 4 代码可得结果。基于 Python 的编程实践可以提升学生的计算能力和问题解决能力，同时直观展示矩阵运算的效果<sup>[5]</sup>。

针对  $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，解释几何意义，通过动画演示  $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  表示的是一个线性变换，它将向量  $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$  变成  $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$  (图 5)。几何意义的教学探索为学生深入理解矩阵运算及其空间变换特性提供了有效途径<sup>[4]</sup>。

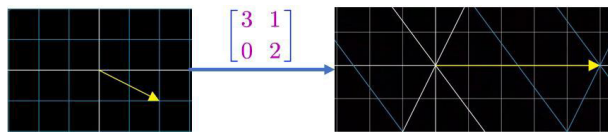


图 5

由于图中黄色向量只是平面的一个个体，矩阵  $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  实现的是整张平面的变换，因此这里可以融入课程思政元素：个人的命运总是跟国家大局的命运紧密相连。如同一片浩瀚的星空，繁星闪烁依赖于宇宙的抱，江山无恙，方得岁月静好；山河永固，才能家人共度长安。将课程思政融入数学教学，能够在知识传授的同时引导学生树立正确的价值观<sup>[6]</sup>。

3. 矩阵是一种线性映射

分别通过动画演示下面三个矩阵表示的线性变换： $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ，其中  $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  已经作为引出例子演示，接下来演示后两个矩阵表示的线性映射。图 6，图 7 分别表示  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$  的线性映射，他们分别表示二维到三维和三维的二维的线性变换。

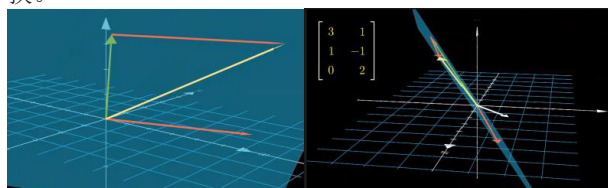


图 6

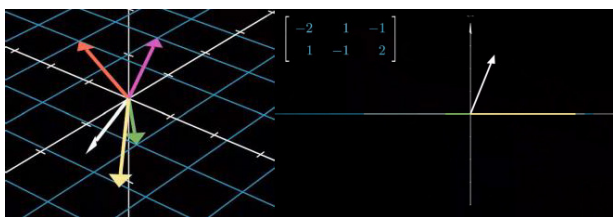


图 7

#### 4. 矩阵乘法是多重线性映射

接下来分别动画演示以下三个矩阵的乘法运算各自表示的线性变换，并总结部分矩阵乘法易错的规律。

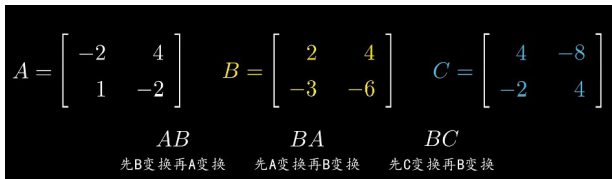


图 8

图 (9) 分别是上述三个运算表示的变换

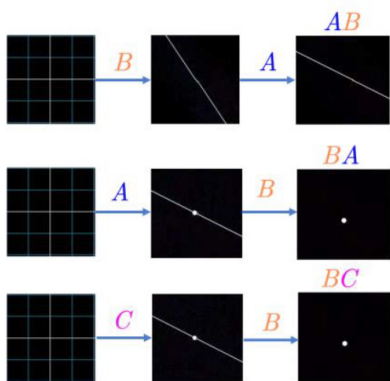
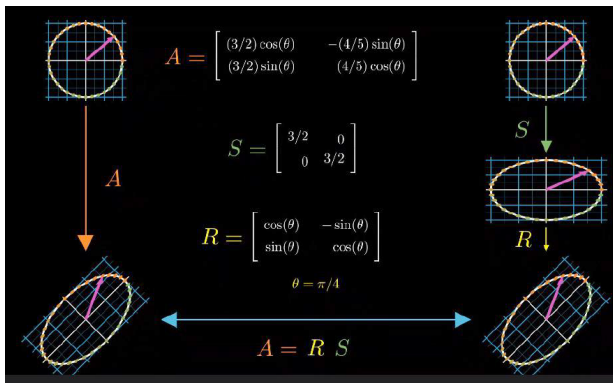


图 9 AB, BA, BC 表示的线性变换

通过对比以上图像，能总结出规律： $AB \neq BA$ ，（即乘法不满足交换律）； $BA = O$  并不能推出  $A = O$  或  $B = O$ （即不满足零因子律）； $BA = BC$  并不能推出  $A = C$ （即不满足消去律）。最后通过一个例子，说明矩阵和矩阵乘法可以实现一样的变换。即  $A = RS$ 。



最重要的是通过以上例子，认识到矩阵  $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$  实现的是旋转变换，为下一步解决问题埋下伏笔。

#### 5. 航天器调整姿态

三维空间中的旋转矩阵如下，他们分别表示绕 X, Y, Z 轴的旋转。

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, R_y(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}, R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

回到本节开头的问题，航天器通过左乘上述状态矩阵来实现姿态调整。

#### (三) 编程实践

引导学生使用 Python 进行矩阵乘法的计算和应用。例如，学生通过代码实现二维旋转矩阵的计算，并进一步探索三维空间的航天器姿态调整。这一环节强化了学生的编程能力和实践意识。

#### (四) 应用拓展

通过实例讲解矩阵在航天器姿态控制中的应用，强调数学在工程领域的重要性。学生不仅能够理解矩阵的理论意义，还能将其应用于解决实际问题。

### 三、教学效果与反思

#### (一) 教学成效

信息技术的有效应用能够为数学教学提供更加灵活和创新的模式<sup>[7]</sup>。Manim 动画凭借其动态表达能力和直观的教学效果，在大学数学课堂中广泛应用<sup>[8]</sup>。可视化加深了对概念的理解和应用，使课堂变得有趣和通俗易懂。学生通过可视化演示和编程实践，加深了对矩阵及其乘法的理解。课堂参与度显著提高，特别是在讨论航天器姿态调整时，学生表现出浓厚兴趣。

#### (二) 存在问题

动画演示节奏需进一步优化，以确保所有学生都能跟上讲解。对非工科专业学生，航天器案例的物理背景理解存在一定难度。

### 四、教学改革展望

加强编程支持：为基础薄弱的学生提供更多代码模板和课后辅导资源。

丰富案例设计：结合不同学科背景设计更多实际应用案例，如图像处理、市场数据分析等。

优化可视化资源：提升动画质量，适当增加学生互动环节，增强课堂体验。

深化课程思政：挖掘更多科技创新实例，增强学生对科技进步的理解和社会责任感。

## 结 论：

以可视化和实践为导向的教学方法在优化线性代数教学方面显示了显著成效，特别是在矩阵及其乘法的教学中，通过直观的呈现方式和实际案例应用，不仅提升了学生对抽象数学概念的理解，还极大地激发了他们的学习兴趣和实践能力。研究表明，通过应用导向的教学设计，学生能够更轻松地将理论知识迁移到实际问题的解决中<sup>[9]</sup>。此外，案例教学法以生动具体的实例，使学生更深刻地理解知识点，增强了学习记忆的牢固性和课堂参与度<sup>[10]</sup>。

当前，线性代数的教学面临着若干显著痛点，如内容抽象、理论与实践脱节、学生学习兴趣不足，以及传统教学方式在动态表现数学概念方面的局限性。这些问题直接影响了教学效果，也限制了学生的创新思维与实践能力的发展。针对这些问题，Manim 可视化技术以其动态化、交互性强和表现力突出的特点，为线性代数教学改革提供了新的解决方案。

首先，Manim 动画通过动态的几何演示，将抽象的数学符号和复杂的运算过程转化为可视化的图形变化。例如，在矩阵乘法教学中，Manim 以动画的形式清晰地展示了向量经过线性变换后的位置变化，以及多个矩阵乘法组合带来的复合线性映射。这种方式弥补了传统静态板书和 PPT 的不足，为学生提供了直观的认知路径，有助于他们理解矩阵的几何意义及其作为线性映射的核心作用<sup>[8]</sup>。

其次，Manim 可视化教学极大地提高了课堂的趣味性和学生的参与度。研究表明，利用动态技术可以显著吸引学生的注意力，使其更积极地参与课堂互动<sup>[2]</sup>。结合 Manim 制作的动画资源不仅内容丰富，而且具有良好的艺术性与逻辑性，能够让学生在学习数学时感受到科学与美的结合。这种方式特别适合线性代数这样以逻辑严密性为特征的课程，可以有效克服学生因内容枯燥而产生的畏难心理。

第三，Manim 的开源特性和 Python 支持为教学设计者和学生提供了高度的可操作性。教师可以根据教学需求设计动画脚本，学生也能通过编程实践参与动画制作，培养动手能力和创新意识<sup>[5]</sup>。这种技术与实践的结合，尤其是在解决航天器姿态调整等工程问题中的应用，为学生提供了数学知识在实际场景中落地的鲜活示例。

此外，Manim 可视化技术在促进跨学科整合和实现课程思政目标方面也有独特的优势。通过设计航天技术等具有现实意义的教学案例，不仅可以让学生感受到数学在国家科技进步中的关键作用，还能够激发他们的社会责任感和民族自豪感<sup>[6]</sup>。例如，利用嫦娥六号月球探测任务的数据矩阵作为教学案例，不仅提升了教学内容专业性，还实现了爱国主义与科技创新精神的有机融合。

未来，针对可视化教学中存在的节奏把控难度大、非工科学生理解工程背景有一定障碍等问题，我们将进一步优化教学设计，加强学生分层指导和教学资源的多样性。通过完善 Manim 动画的质量与互动性，设计更贴近学生需求的案例，并持续融入更多实践与创新环节，力求在学生数学能力、实践能力和科学素养的全面培养方面取得更大突破。以此为基础，我们期望为线性代数课程教学改革提供更多有益的经验，为培养具有创新意识和实践能力的复合型人才作出积极贡献。

## 参考文献：

- [1] 李文彬, 王晓明. "线性代数教学改革探索与实践." 高等教育研究, 2020, 38(5): 45-50.
- [2] 张强, 刘志辉. "基于可视化技术的高等数学教学研究." 数学教育学报, 2019, 31(2): 35-42.
- [3] 王丽娜, 李健. "利用动画技术提升数学教学效果的研究." 中国教育技术, 2021, 39(4): 89-93.
- [4] 陈刚, 孙晓敏. "线性代数中的几何意义教学探索." 高校数学教学与研究, 2020, 18(3): 56-61.
- [5] 宋佳慧, 王子昊. "基于 Python 的矩阵教学案例设计." 数学与计算机教育, 2022, 34(1): 12-19.
- [6] 赵瑞云. "课程思政背景下的数学教学改革研究." 教育理论与实践, 2021, 41(10): 67-72.
- [7] 杨海峰. "信息技术在高校数学教学中的应用." 教育与信息化, 2020, 37(6): 44-49.
- [8] 李晶, 张丽丽. "Manim 在大学数学教学中的应用探索." 中国高校科技, 2021, 35(7): 29-33.
- [9] 徐华. "线性代数教学的应用导向与实践分析." 中国大学教学, 2019, 35(11): 89-93.
- [10] 吴建明. "数学课程中案例教学法的实施与效果." 教育科学, 2020, 36(3): 55-62.

---

广西高等教育本科教学改革工程项目《大学数学可视化教学的创新与实践》(2023JGB480), 广西高校中青年科研基础能力提升项目《几类传染病模型的动力学分析与最优控制》(2021KY1653), 桂林信息科技学院校级教改项目《复变函数》(2024XKJC03)。

---

## 作者简介：

韦爱举, 桂林信息科技学院讲师, 硕士, 研究方向为微分方程与动力系统

通讯作者: 谢莉, 桂林信息科技学院讲师, 硕士, 研究方向为数值计算。