中点问题在几何图形的多种解法

梁晶晶[1]　梁爱敏[2]
1 延安大学数学与计算机科学学院　陕西　延安　716000
2 南华大学核科学技术学院　湖南　衡阳　421200

摘　要:在初中数学中，几何图形占据很重要的位置。从不同的角度分析分析，会有不同的解体方法。针对一道几何的中点问题，从三个角度出发给出五种解法。一是利用三角函数面积法；二是利用三角形中位线的逆定理；三是利用三角形全等的性质定理。通过探究结合图形的多种解法，促进学生创新思维的发展。

关键词：初中数学；几何图形；创新思维

引　言：

几何图形是学生学习数学过程中的重要内容。它不仅可以培养学生的逻辑推理能力，空间想象能力，还可以培养学生的创新思维。本文以一道数学题为例从不同角度探寻几何图形的多种解法，供读者参考。

一、题目呈现

以ΔABC的两边AB、AC为边分别向外作两正方形$ABEF$，正方形$ACGH$，AD为高。

求证：直线AD平分线段FH

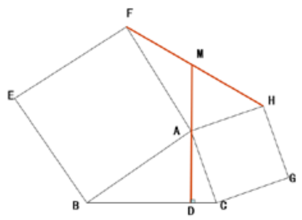

图 1

二、题目分析

本题以三角形为背景，以正方形为基本图形。主要考察的是三角形中位线的逆定理、全等三角形的性质和三角函数面积法[1]。挖掘几何图形的基本特征，理清已知量与未知量之间的逻辑关系是解决几何问题的关键。从求证出发，题目中要证直线AD平分线段FH，也就是证M是线段FH的中点。从代数方面出发，利用三角函数面积法：$s=\frac{1}{2}ab\sin c$。从几何方面出发，根据适当定理的原则：所选定理的结论要与证明题的结论具有一致性；所选定理的条件要与证明题的条件基本上符合或由密切的联系。根据结论和条件，我们选择三角形中位线的逆定理：过三角形一边的中点，平行于底边的直线平分第三边；全等三角形的性质：对应角相等，对应边相等；根据已知，得到如下关系

如图 1，由四边形$ABEF$和四边形$ACGH$是正方形可知

所以 $AB=BE=EF=FA$，$AC=CG=GH=HA$

$\angle FAB=90°$，$\angle HAC=90°$

又因为$\angle MAD$是平角

所以

$\angle FAM+\angle BAD=90°$，$\angle MAH+\angle CAD=90°$

因为在ΔABD中，$\angle ADB=90°$

所以$\angle ABD+\angle BAD=90°$

所以$\angle FAM=\angle ABD$

同理得$\angle MAH=\angle ACD$

三、解法探究

基于目前得到关系，从代数方面看，根据得到相等边和相等角的关系，我们很容易找到三角函数算三角形面积的已知量。从几何方面看，我们并不能直接运用定理和性质得到结论。这就要求我们构造辅助线，将已知量与定理和性质建立联系。

思路 1　利用三角函数面积法

解法 1　如图 2，在ΔAFH中

$$S_{\Delta FAM}=\frac{1}{2}AF\times AM\times\sin\angle FAM$$

$$S_{\Delta HAM}=\frac{1}{2}AH\times AM\times\sin\angle HAM$$

又因为

$\angle FAM=\angle ABD$，$\angle MAH=\angle ACD$　$AF=AB$　$AH=AC$

所以 $S_{\Delta FAM}=\frac{1}{2}AB\times AM\times\sin\angle ABD=\frac{1}{2}AM\times AD$

$S_{\Delta HAM}=\frac{1}{2}AC\times AM\times\sin\angle ACD=\frac{1}{2}AM\times AD$

所以$S_{\Delta FAM}=S_{\Delta HAM}$

所以$FM\times h=HM\times h$

所以M是线段FH的中点

故直线AD平分线段FH

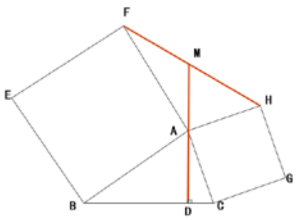

图 2

点评：这种解法是利用三角面积的两种不同求法。第一种求法是三角形的面积 = 底边 × 高，利用三角形面积共底同高，只要证明了两个三角形的面积相等继而可以得到三角形的底边相等。在证明面积相等时，利用$s=\frac{1}{2}ab\sin c$可以很清晰的得到两三角形面积相等。难就难在很多同学想不到利用面积法证明中点问题。

思路 2　利用三角形中位线的逆定理

解法 2　如图 2，加倍延长HA至点P，连接FP

有$\mathrm{PA}=\mathrm{HA}=\mathrm{AC}$

因为$\angle\mathrm{HAP}$是平角

所以

$\angle\mathrm{BAC}+\angle\mathrm{BAP}=\angle\mathrm{HAP}-\angle\mathrm{HAC}=180^{\circ}-90^{\circ}=90^{\circ}$

又因为$\angle\mathrm{FAB}=\angle\mathrm{FAP}+\angle\mathrm{BAP}=90^{\circ}$

所以$\angle\mathrm{FAP}=\angle\mathrm{BAC}$

在$\Delta\mathrm{FAP}$和$\Delta\mathrm{BAC}$中

$\mathrm{FA}=\mathrm{BA}$

$\angle\mathrm{FAP}=\angle\mathrm{BAC}$

$\mathrm{PA}=\mathrm{AC}$

所以$\Delta FAP\cong\Delta BAC$

所以$\angle\mathrm{PFA}=\angle\mathrm{CBA}$

所以$\angle\mathrm{PFA}=\angle\mathrm{FAM}$

所以$\mathrm{MA}//\mathrm{FP}$

又因为A是线段HP的中点

所以M是线段FH的中点

故直线AD平分线段FH

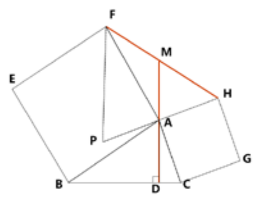

图 3

对本题而言，三角形中位线不仅可以知中点证平行，还可以知平行证中点。

解法 3　如图 3，过点F作FP平行MA与HA的延长线交于点P

因为$\mathrm{FA}//\mathrm{MA}$

所以$\angle\mathrm{PFA}=\angle\mathrm{FAM}$

又因为$\angle\mathrm{FAM}=\angle\mathrm{ABD}$

所以$\angle\mathrm{PFA}=\angle\mathrm{ABD}$

因为$\angle\mathrm{HAP}$是平角

所以

$\angle\mathrm{BAC}+\angle\mathrm{BAP}=\angle\mathrm{HAP}-\angle\mathrm{HAC}=180^{\circ}-90^{\circ}=90^{\circ}$

又因为$\angle\mathrm{FAB}=\angle\mathrm{FAP}+\angle\mathrm{BAP}=90^{\circ}$

所以$\angle\mathrm{FAP}=\angle\mathrm{BAC}$

在$\Delta\mathrm{FAP}$和$\Delta\mathrm{BAC}$中

$\mathrm{FA}=\mathrm{BA}$

$\angle\mathrm{PFA}=\angle\mathrm{ABD}$

$\angle\mathrm{FAP}=\angle\mathrm{BAC}$

所以$\Delta FAP\cong\Delta BAC$

所以$\mathrm{AP}=\mathrm{AC}$

又因为$\mathrm{AC}=\mathrm{HA}$

所以$\mathrm{AP}=\mathrm{HA}$

所以A是线段HP的中点

又因为$\mathrm{FA}//\mathrm{MA}$

所以M是线段FH的中点

故直线AD平分线段FH

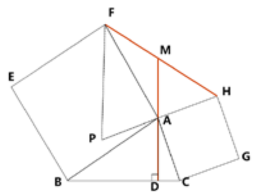

图 4

点评：这种解法是通过做辅助线构造三角形，得到A是线段HP的中点，FP平行MA，利用三角形中位线的逆定理。该解法的难点在于如何做辅助线构造三角形。这就要求学生从未知条件中点出发，联系几何图形的特征，构造 FHP。

思路 3　利用三角形全等的性质

解法 4　如图 5，作FK平行AH与AM的延长线交于点K

因为$\mathrm{FK}//\mathrm{AH}$

所以$\angle\mathrm{FKA}=\angle\mathrm{MAH}$

又因为$\angle\mathrm{MAH}=\angle\mathrm{ACD}$

所以$\angle\mathrm{FKA}=\angle\mathrm{ACD}$

在ΔAKF和ΔBCA中

$AF = BA$

$\angle FKA = \angle ACD$

$\angle FAK = \angle ABC$

所以$\Delta AKF \cong \Delta BCA$

所以$FK = AC$

又因为$AC = HA$

所以$FK = HA$

在ΔFKM和ΔHAM中

$FK = HA$

$\angle FKA = \angle MAH$

$\angle FMK = \angle HMA$

所以$\Delta FKM \cong \Delta HAM$

所以$FM = HM$

所以M是线段FH的中点

故直线AD平分线段FH

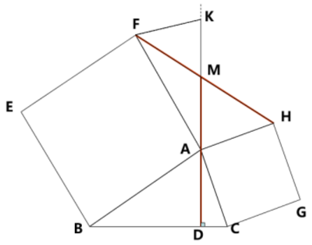

图 5

对本题而言，构造全等三角形的方法不止一种。

解法5　如图 6，作HK平行AF与AM的延长线交于点K

因为$HK//AF$

所以$\angle FAM = \angle HKA$

又因为$\angle FAM = \angle ABD$

所以$\angle HKA = \angle ABD$

在ΔHKA和ΔABC中

$HA = AC$

$\angle HKA = \angle ABD$

$\angle KAH = \angle BCA$

所以$\Delta HKA \cong \Delta ABC$

所以$HK = AB$

又因为$AB = FA$

所以$HK = FA$

在ΔAMF和ΔKMH中

$HK = FA$

$\angle FAM = \angle HKM$

$\angle AMF = \angle KMH$

所以$\Delta AMF \cong \Delta KMH$

所以$MF = MH$

所以M是线段FH的中点

故直线AD平分线段FH

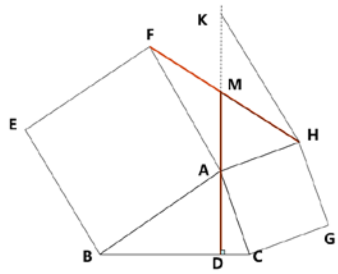

图 6

点评：这种解法是将中点转化为线段相等关系，通过作平行线构造全等三角形。本思路的难点在于构造的三角形与哪个三角形全等以及如何构造该全等三角形。学生要从基础图形ΔABC出发，再借助正方形边相等的性质，构造与它全等的三角形。

结　语：

几何图形的中点问题可以借助中位线的逆定理、垂径定理、平行四边性质定理、等腰三角形性质定理，或者将中点转化为线段相等关系利用全等三角形的性质。除此之外，还可以利用代数方法，如运用三角函数面积法、正余弦定理等。基于不同已知条件挑选合适的方法是解几何图形的关键[2]。在这个过程中让学生们体现到初中几何图形教育绝非简单的图形记忆，而是思维革命的起点。

参考文献：

[1] 张宁 . 探寻多种解法激活创新思维——一道第 26 届 " 希望杯 " 全国初中数学邀请赛试题的解法探究 [J]. 理科考试研究（初中版）,2022,29(12):12-16.

[2] 乔凤燕 . 构造基本图形妙解折叠问题——一道三角形试题的解法探究 [J]. 中学数学教学参考 ,2023(12): 36-37.

[3] 李文 . 新加坡教育数字化转型新图景 : 技术塑造学习未来——基于《2030 年教育科技总体规划》分析 [J]. 比较教育研究 ,2024,46(12):98-107.