关于行列式计算方法的探究

杨 翀 储著松 赵 凤
安徽新华学院 安徽 合肥 230093

摘 要：行列式是代数学的一个重要知识点，关于行列式的计算方法有很多，本文主要探讨了化三角形法、降阶法、升阶法、范德蒙德行列式和数学归纳法。

关键词：行列式；化三角形法；降阶法；数学归纳法

引 言：

行列式是代数学中的重要内容[1, 2]，它由德国数学家莱布尼茨和日本数学家关孝和发明的。它也是解决一些数学问题的重要工具，如求解线性方程组，同时行列式在物理学、力学、天文学等理论以及通信工程等领域都有着广泛应用[3, 4]。行列式的计算是行列式的重要内容，具有较强的灵活性和技巧性，因此大量的专家和学者对其进行了讨论和研究[5-8]。本文主要研究了行列式的五种计算方法，并通过例题说明如何使用该方法来计算行列式。

一、行列式的计算方法 1：化三角形法

化三角形法是将行列式转化为上（下）三角行列式进行计算的方法，也是最常用的行列式计算方法，尤其适用于一类爪形行列式以及行(列)和相等行列式的求解。

（一）上（下）三角行列式

定义 1 主对角线以下的元素都为 0 的行列式称为上三角行列式，即

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

主对角线以上的元素都为 0 的行列式称为下三角行列式，即

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

上（下）三角行列式的值等于主对角线上元素的乘积，即

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

（二）爪形行列式

定义 2 第一行、第一列和主对角线上的元素都是数字，其他位置上的元素都是 0 的行列式，称为爪形行列式，即

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

将爪形行列式化为三角行列式，得

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\left(a_0-\frac{c_1}{a_1}b_1-\frac{c_2}{a_2}b_2-\cdots-\frac{c_n}{a_n}b_n\right).$$

（三）行（列）和相等的行列式

行（列）和相等的行列式，形如

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix},$$

对于行（列）和相等的行列式的求解，下面将给出两种解法。

解法一：先将其化成爪形行列式，再化为三角行列式。

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}\xlongequal{r_i-r_1(i=2,\cdots,n)}\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b-a & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_i(i=2,\cdots,n)}\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}=\left[a+(n-1)b\right](a-b)^{n-1}.$$

解法二：先将所有列（行）加到第一列（行），再化为三角行列式。

例 1 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}$.

解：$D=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}\overset{c_1+c_i(i=2,3,4)}{=\!=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix}5&1&1&1\\5&2&1&1\\5&1&2&1\\5&1&1&2\end{vmatrix}$

$$=5\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}\overset{r_i-r_1(i=2,3,4)}{=\!=\!=\!=\!=}5\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=5.$$

二、行列式的计算方法 2：降阶法

定理 1 行列式等于任意一行（列）的元素与其对应代数余子式乘积之和

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\left(i=1,2,\cdots,n\right)(\text{按行展开式})$$

$$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\left(j=1,2,\cdots,n\right)(\text{按列展开式})$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式。

降阶法是利用行列式按行（列）展开定理来降低行列式的阶数。其适用范围：行列式某行（列）中含有较多 0。因此若使用降阶法，需要通过使用行列式的性质将行列式化为某行（列）中有较多 0 的行列式，再进行求解。

例 2 计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}0&0&1&0\\1&0&3&0\\2&3&7&5\\3&4&6&8\end{vmatrix}.$$

解：在 4 阶行列式 D 中，第 1 行中只有 1 个非零元素，按第 1 行展开得

$$D=1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&0&0\\2&3&5\\3&4&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&3&5\\3&4&8\end{vmatrix},$$

在新的 3 阶行列式中，第 1 行中只有 1 个非零元素，继续按第 1 行展开得

$$D=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&3&5\\3&4&8\end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&5\\4&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&5\\4&8\end{vmatrix}=3\times8-4\times5=4.$$

三、行列式的计算方法 3：升阶法

升阶法也称加边法，是通过将行列式增加 1 行和 1 列，从而使得 n 阶行列式转换成便于计算的 $n+1$ 阶行列式，且保持 $n+1$ 阶行列式的值和 n 阶行列式的值相等。增加的 1 行和 1 列，一般是第一行第一列元素为 1，第一行（列）其余位置上的元素和原行列式其他行（列）出现较多的元素相同（也可以直接取 1），第一列（行）的其余元素为 0 。

例 3 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}b_1+a_1&a_1&\cdots&a_1\\a_2&b_2+a_2&\cdots&a_2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_n&a_n&\cdots&b_n+a_n\end{vmatrix}.$$

解：该行列式中每列对应位置元素（除对角线位置外）都相同，故采用升阶法得

$$D_n=\begin{vmatrix}b_1+a_1&a_1&\cdots&a_1\\a_2&b_2+a_2&\cdots&a_2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_n&a_n&\cdots&b_n+a_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0\\a_1&b_1+a_1&a_1&\cdots&a_1\\a_2&a_2&b_2+a_2&\cdots&a_2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_n&a_n&a_n&\cdots&b_n+a_n\end{vmatrix}$$

$$\overset{c_i-c_1(i=2,\cdots,n+1)}{=\!=\!=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&-1&-1&\cdots&-1\\a_1&b_1&0&\cdots&0\\a_2&0&b_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_n&0&0&\cdots&b_n\end{vmatrix}=b_1b_2\cdots b_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\right).$$

四、行列式的计算方法 4：范德蒙德行列式

n 阶范德蒙德行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&a_3^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}\left(a_i-a_j\right).$$

例 4 计算 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\\2^2&3^2&4^2&5^2\\2^3&3^3&4^3&5^3\end{vmatrix}$.

解：$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\\2^2&3^2&4^2&5^2\\2^3&3^3&4^3&5^3\end{vmatrix}$

$$=(3-2)(4-2)(5-2)(4-3)(5-3)(5-4)=12.$$

五、行列式的计算方法 5：数学归纳法

数学归纳法通常用来证明某些涉及自然数　的结论，在使用数学归纳法计算 n 阶行列式时，对于“猜

测”的结果$D_n=f(n)$，首先需验证$n=1$时满足$D_1=f(1)$，再假设$n=k$时有$D_k=f(k)$，最后利用此假设来证明$n=k+1$时$D_{k+1}=f(k+1)$成立。

例5 证明：

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ -x_1 & x_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -x_{n-2} & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}=x_1x_2\cdots x_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i}\right),$$

其中$x_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

证：$$D_1=|a_1+x_1|=x_1\left(1+\frac{a_1}{x_1}\right),$$

假设$k=n-1$时结论成立，即

$$D_{n-1}=x_1x_2\cdots x_{n-1}\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_i}{x_i}\right),$$

则当$k=n$时，将D_n按第n列展开得

$$\begin{aligned}D_n&=x_nD_{n-1}+(-1)^{n+1}a_n(-x_1)(-x_2)\cdots(-x_{n-1})\\&=x_nD_{n-1}+(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}a_nx_1x_2\cdots x_{n-1}=x_nD_{n-1}+x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n\frac{a_n}{x_n}\\&=x_1x_2\cdots x_n\left(1+\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\cdots+\frac{a_n}{x_n}\right)=x_1x_2\cdots x_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i}\right),\end{aligned}$$

即当$k=n$时结论成立。

结　语：

本文介绍了行列式的五种计算方法，并通过具体的例题进行论证。在实际的计算过程中，行列式的求解还有其他方法，如拆分法；同时同一个行列式也可以使用多种方法进行求解，如何选择最简单的方法，这些都将成为本文作者接下来的研究内容。

参考文献：

[1] 同济大学数学系 . 线性代数 (第六版)[M]. 北京 : 高等教育出版社，2018.

[2] 王萼芳，石生明 . 高等代数 (第四版)[M]. 北京 : 高等教育出版社，2013.

[3] 王雯婷 , 蒋龙 , 裴启明 . 雅可比矩阵及其行列式在理工学科中的应用 [J]. 曲靖师范学院学报 ,2020,39(06):5-8.

[4] 石会萍 . 行列式、矩阵在量子力学中的应用 [J]. 沧州师范学院学报 ,2014,30(01):32-36.

[5] 刘素兵 , 郝琳 , 陈春梅 .n 阶行列式的计算方法研究 [J]. 赤峰学院学报 (自然科学版),2019,35(02):17-19.

[6] 陈丽珍 , 关汉奎 . 行列式的计算方法研究 [J]. 长治学院学报 ,2020,37(02):1-3.

[7] 柳江岸 , 朱小艳 , 周小雪 , 等 . 行列式的计算 [J]. 科技风 ,2021,(12):41-42.

[8] 王建红 . 行列式计算方法的研究 [J]. 黄山学院学报 ,2021,23(03):11-14.

基金项目：安徽新华学院校级自然科学项目（2022zr019）；安徽新华学院校级自然科学重点项目（2022zr003）；安徽省高校科研项目（2023AH051807）；安徽新华学院校级自然科学项目（2024zr009）

作者简介：杨翀（1998— ），女，汉族，安徽铜陵人，硕士研究生，助教，研究方向：代数编码。